Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$, l et l' deux nombres réels.

Somme

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = \ldots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Remarque FI signifie « forme indéterminée ». Cela signifie qu'on ne peut pas conclure immédiatement, que tout résultat est possible et qu'il faudra certainement modifier l'écriture pour lever l'indétermination.

Produit

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ldots$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemples $u_n = n$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$; $\lim\limits_{n\to\infty} 3u_n = \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} (3+u_n) = \infty$

Quotient

(v_n) est une suite telle que pour tout entier naturel $n, v_n \neq 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ldots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ldots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemples $u_n = 3$; $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$; $v_n = n^2$; $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$; $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0$;

Remarque FI est l'abréviation de forme indéterminée. Cela signifie que l'on ne peut pas conclure a priori sur la limite. Prenons par exemple la forme indéterminée $\frac{0}{0}$

Choisissons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ Nous avons $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$;

Mais $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ alors que $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ bref difficile de conclure a priori sur le quotient de deux suites tendant vers 0

Démonstration

Nous n'allons pas tout démontrer mais un peu quand même ….

- $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n = l}$ **,** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} v_n = l'}$ **alors** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'}$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \text{ tel que } \forall n \geq N_1\ |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \text{ tel que } \forall n \geq N_2\ |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$

  $\forall n \geq \sup(N_1, N_2)\ |u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l + v_n - l'| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

- $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n = l}$ **,** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} v_n = +\propto}$ **alors** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = +\propto}$

  (u_n) est convergente donc bornée. $\exists M_1 > 0 \text{ tel que } \forall n\ |u_n| < M_1$

  $\forall n\ -M_1 \leq u_n \leq M_1$

  $\forall M > 0, \exists N_2 \text{ tel que } \forall n \geq N_2\ v_n \geq M + M_1$

  Donc $\forall n \geq \max(N_1, N_2)\ u_n + v_n \geq M + M_1 - M_1 \geq M \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n + v_n = +\propto$

- $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n = +\propto}$ **,** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} v_n = +\propto}$ **alors** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = +\propto}$

  $\forall M_1 > 0, \exists N_1 \text{ tel que } \forall n \geq N_1\ v_n \geq \frac{M_1}{2}$

  $\forall M_2 > 0, \exists N_2 \text{ tel que } \forall n \geq N_2\ v_n \geq \frac{M_1}{2}$

  Donc $\forall n \geq \max(N_1, N_2)\ u_n + v_n \geq \frac{M_1}{2} + \frac{M_2}{2} \geq \frac{1}{2}(M_1 + M_2) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n + v_n = +\propto$

- $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n = l}$ **,** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} v_n = l'}$ **alors** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n v_n = ll'}$

  u_n est convergente donc majorée en valeur absolue par $M > 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \; tel \; que \; \forall n \geq N_1 \; |u_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2|l'|}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \; tel \; que \; \forall n \geq N_2 \; |v_n - l'| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$

$|u_n v_n - ll'| \leq |u_n v_n - ll'| \leq |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \leq |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \leq |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l|$

Donc $\forall n \geq \sup(N_1, N_2) \; |u_n v_n - ll'| \leq M * \frac{\varepsilon}{2M} + |l'| * \frac{\varepsilon}{2|l'|} \leq \varepsilon$

- $\mathbf{\lim_{n\to\infty} u_n = l \; (l > 0)}$ **,** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} v_n} = +\infty$ **alors** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} u_n v_n} = +\infty$

  $\exists N_1 \; tel \; que \; \forall n \geq N_1 \;\; u_n \geq \dfrac{l}{2}$

  $\forall M > 0, \exists N_2 \; tel \; que \; \forall n \geq N_2 \; u_n \geq \frac{2M}{l}$

  Donc $\forall n \geq \sup(N_1, N_2) \;\; u_n v_n \geq \frac{2M}{l} * \frac{l}{2} \geq M \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$
- $\mathbf{\lim_{n\to\infty} u_n = l}$ **,** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} v_n} = +\infty$ **alors** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$

  $\forall M > 0, \exists N_2 \; tel \; que \; \forall n \geq N_2 \; v_n \geq M \Longrightarrow \frac{1}{v_n} \leq \frac{1}{M}$ Nous en déduisons donc que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = 0$

  $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = 0$ Donc $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ (produit de limites finies déjà vu)
- $\mathbf{\lim_{n\to\infty} u_n = l \; (l \neq 0)}$ **, alors** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}}$

  $\lim_{n\to\infty} u_n = l \; (l \neq 0) \quad \Longrightarrow \exists N_1 \; tq \; \forall n \geq N_1 \frac{|l|}{2} \leq |u_n| \leq \frac{3|l|}{2} \Longrightarrow \frac{2}{3|l|} \leq \frac{1}{|u_n|} \leq \frac{2}{|l|}$

  $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l}\right| = \left|\dfrac{l}{lu_n} - \dfrac{u_n}{lu_n}\right| = \left|\dfrac{l - u_n}{lu_n}\right| = \dfrac{1}{|u_n|} * \dfrac{1}{|l|} * |u_n - l|$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \; (N_2 \geq N_1) \; tel \; que \; \forall n \geq N_2 \; |u_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon |l|^2}{2}$

  Il vient $\forall n \geq N_2 \; \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| \leq \frac{2}{|l|} * \frac{1}{|l|} * \frac{\varepsilon |l|^2}{2} \leq \varepsilon$ Donc

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \; (N_2 \geq N_1) \; tel \; que \; \forall n \geq N_2 \; \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| \leq \varepsilon$ cela implique $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$
- $\mathbf{\lim_{n\to\infty} u_n = l \; (l \neq 0)}$ **,** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} v_n = l'}$ **alors** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{l'}{l}}$

  Evident car $\frac{v_n}{u_n} = v_n * \frac{1}{u_n}$. $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$; donc $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{l'}{l}$ (produit de limites finies déjà vu)
- $\mathbf{\lim_{n\to\infty} v_n = 0^+}$ **alors** $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n}} = +\infty.$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \; tel \; que \; \forall n \geq N_1 \; 0 < v_n < \varepsilon \Longrightarrow \dfrac{1}{v_n} \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$

  Donc $\forall M > 0 \; \left(M = \frac{1}{\varepsilon}\right) \exists N_1 \; tel \; que \; \forall n \geq N_1 \frac{1}{v_n} \geq M \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = +\infty.$
- $\mathbf{\lim_{n\to\infty} v_n = 0^+}$ **et** $\mathbf{\lim_{n\to\infty} u_n = l (l > 0)}$ **alors** $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}} = +\infty.$

  $\lim_{n\to\infty} u_n = l (l > 0)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$. (Produit de limites de deux suites) dont l'une est $+\infty$ et l'autre un réel strictement positif)

Théorème de composition	• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$. • Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I et L tel que $\lim_{x\to l} f(x) = L$ avec $L \in \overline{\mathbb{R}}$. • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ Alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite telle que $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Nous allons montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^x$

Interéssons nous à la suite v_n définie par $v_n = \frac{x}{n}$ et à la fonction f definie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Nous avons $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = (\ln(1+x))'_{x=0} = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=0} = 1$ Donc d'après le

théorème ci-dessus $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x$

Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = x$. Composons cette fois grâce à l'exponentielle et au théorème ci-dessus, cela nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^x$$