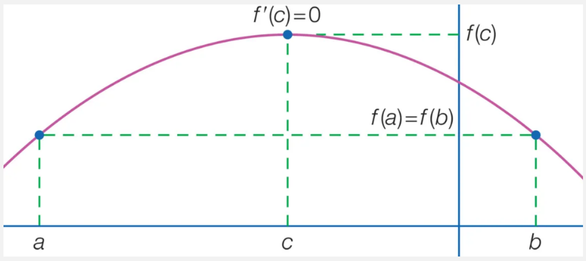
Théorème de Rolle

Théorème	Soit f une fonction réelle, définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ $f(a)=f(b) \Longrightarrow \exists c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=0$	Illustration 

Preuve

f continue sur $[a,b]$, donc atteint ses bornes inf (m) et max (M) sur $[a,b]$.
$\exists x \in [a,b]\ tel\ que\ f(x)=m$ et $\exists y \in [a,b]\ tel\ que\ f(y)=M$.

- SI $m=M$ alors f est constante sur $[a,b]$ ce qui implique $f'=0$ sur $]a,b[$
- SI $m \neq M$ alors $f(a)$ et $f(b)$ étant égaux nous pouvons supposer que $\exists c \in\,]a,b[$ tel que $f(c) \in \{m;M\}$

Supposons que $f(c)=M$. M étant un maximum global de f sur $[a,b]$ et f étant dérivable en c nous en déduisons grâce à un théorème précédent que c est un point critique de $f \Longrightarrow f'(c)=0$.
Bien entendu nous serions arrivés à la même conclusion si $f(c)$ était égal à m.

Théorème des accroissements finis

Théorème	Soit f une fonction réelle, définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ Alors $\exists c \in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Preuve

Considérons la fonction $\varphi\colon\begin{Bmatrix} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \to (f(b)-f(a))x - f(x)(b-a)\end{Bmatrix}$. φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

$\varphi(a) = af(b) - af(a) - bf(a) + af(a) = af(b) - bf(a)$
$\varphi(b) = bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b) = af(b) - bf(a)$

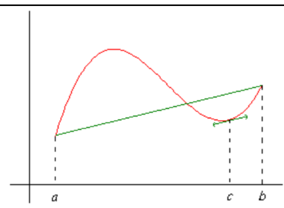
$\varphi(a) = \varphi(b)$ donc d'après le théorème de Rolle, Alors $\exists c \in\,]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.
$\forall x \in\,]a,b[\ \varphi'(x) = (f(b)-f(a)) - f'(x)(b-a)$. Cela implique donc que $\exists c \in\,]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Remarques

- Graphiquement ce théorème peut se lire ainsi : Il existe un point c appartenant à $]a,b[$ tel que le coefficient directeur de la tangente à ce point soit égal au coefficient directeur de la droite passant par les points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$

  $(\ \exists c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$)



Théorème des accroissements finis

- Interprétation cinématique :
  Soit f la fonction donnant la distance parcourue en fonction du temps t.
  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est donc la vitesse moyenne entre $t=a$ et $t=b$.

  Nous savons que f' désigne la vitesse instantanée.
  Le théorème peut donc se lire ainsi : Si sur un trajet entre $t=a$ et $t=b$ la vitesse moyenne a été de V alors cela signifie que sur ce même trajet la vitesse instantanée a été au moins une fois de V