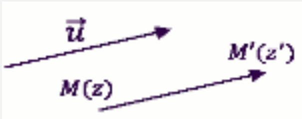
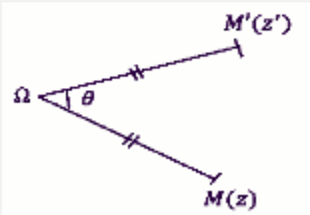
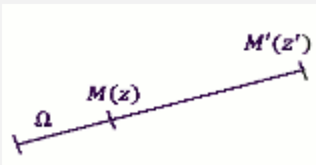
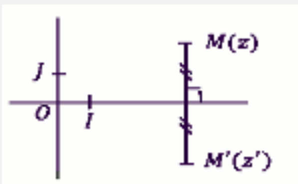
<table>
<tr><th colspan="4">Transformations géométriques.</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Propriété</td><td colspan="3">Les transformations géométriques les plus simples du plan se traduisent par des fonctions complexes très simples.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Translation</td><td rowspan="2">
</td><td>Soit un vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. Alors la transformation :
$z \to z + b$ est une transformation de vecteur $\vec{u}$</td></tr>
<tr><td>Preuve : Soit $f : M(z) \to M'(z + b)$. f transforme tous les points d'affixe z en points d'affixe $z + b$.
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z + b - z = b$. Donc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
f est bien la translationd de vecteur $\vec{u}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rotation</td><td rowspan="2">
</td><td>Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Et soit Ω le point d'affixe ω. Alors la transformation $z \to e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$
est la rotation d'angle θ et de centre Ω.</td></tr>
<tr><td>Preuve : Soit $f : M(z) \to M'\left(e^{i\theta}(z - \omega) + \omega\right)$. f transforme tous les points M d'affixe z en points M' d'affixe $e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.
Nous avons :
$\overrightarrow{\Omega M'}$ a pour affixe $e^{i\theta}(z - \omega) + \omega - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
$\overrightarrow{\Omega M}$ a pour affixe $(z - \omega)$

$\left\|\overrightarrow{\Omega M'}\right\| = \left|e^{i\theta}(z - \omega)\right| = |z - \omega| = \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|$
De plus $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = Arg\left(\frac{e^{i\theta}(z - \omega)}{(z - \omega)}\right) = Arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
f est donc bien la translation de centre Ω et d'angle θ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Homothéthie</td><td rowspan="2">
</td><td>Soit $k \in \mathbb{R}$. Et soit Ω le point d'affixe ω. Alors la transformation $z \to k(z - \omega) + \omega$
est l'homothétie de centre Ω et de rapport k</td></tr>
<tr><td>Preuve : Soit $f : M(z) \to M'(k(z - \omega) + \omega)$. f transforme tous les points M d'affixe z en points M' d'affixe $k(z - \omega) + \omega$.
Nous avons :
$\overrightarrow{\Omega M'}$ a pour affixe $k(z - \omega) + \omega - \omega = k(z - \omega)$
$\overrightarrow{\Omega M}$ a pour affixe $(z - \omega)$

Nous avons donc $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ ce qui est bien la définition de l'homothétie de centre Ω et de rapport k</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Symétrie axiale</td><td rowspan="2">
</td><td>La transformation $z \to \bar{z}$ est la symétrie axiale d'axe (OI). (Axe des abscisses)</td></tr>
<tr><td>Soit le point M d'affixe $z = a + ib$. Cette transformation envoie M sur M' d'affixe $z = a - ib$. Ce point est bien le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.</td></tr>
<tr><td>Exemples</td><td colspan="3">La transformation $z \to z + i$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe i. Cela correspond à la translation de vecteur de $\vec{u}$ de coordonnées $(0; 1)$
La transformation $z \to iz$ peut aussi s'écrire $z \to e^{\frac{i\pi}{2}}z$ soit la rotation de cetre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
La transformation $z \to -3z + 4$ peut aussi s'écrire $z \to -3(z - 1) + 1$ soit l'homothétie de centre I d'affixe 1 et de rapport -3.</td></tr>
</table>

Similitude directe	
Définition	Nous appelons similitude directe toute transformation du plan de la forme $z \to az + b$ avec a et b complexes quelconques. (Les similitudes indirectes sont de la forme $z \to a\bar{z} + b$ mais ne sont pas au programme)
Propriétés	Soient a et b deux complexes quelconques et f une similitude directe d'expression $f(z) = az + b$ • Si $a = 1$ alors une similitude directe sera de la forme $z \to z + b$. Ce sera donc une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b • Si $a \neq 1$ alors la similitude directe admet un point fixe d'affixe $z = \frac{b}{1-a}$ $$f(z) = z \Leftrightarrow az + b = z \Leftrightarrow z(1-a) = b \Leftrightarrow z = \frac{b}{1-a}$$ Soit Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ $$f(z) = az + b$$ $$\omega = a\omega + b$$ Donc $f(z) - \omega = a(z - \omega)$ (*) Soit un point M d'affixe z et le point M' d'affixe $z' = f(z)$ image du point M par la transformation f L'expression (*) se lit vectoriellement : $$\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$$ Posons $a = \|a\|e^{iarg(a)}$. Il vient $$\overrightarrow{\Omega M'} = \|a\|e^{iarg(a)}\overrightarrow{\Omega M}$$ D'où $\left\|\overrightarrow{\Omega M'}\right\| = \|a\| \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|$ De même $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = arg(a)$ f est donc la composée d'une homothétie et d'une rotation. Une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $arg(a)$ Une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $\|a\|$ L'ordre dans lequel interviennent la rotation et l'homothétie importe peu. Les deux sont interchangeables.
Exemples	Soit $f: z \to 3iz - 2$ Nous sommes dans le cas où $a = 3i$ et donc différent de 1. f admet donc un point fixe. Ce point fixe vérifie $z = 3iz - 2 \Leftrightarrow z(1 - 3i) = -2 \Leftrightarrow z = -\frac{2}{1-3i} \Leftrightarrow z = -\frac{2(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)} \Leftrightarrow z = -\frac{2(1+3i)}{1^2-(3i)^2}$ $$\Leftrightarrow z = -\frac{2(1+3i)}{1+9} = -\frac{2}{10}(1+3i) = -\frac{1}{5}(1+3i)$$ Appelons le Ω d'affixe $\omega = -\frac{1}{5}(1+3i)$ $\|a\| = \|3i\| = 3$ et $arg(a) = \arg(3i) = \frac{\pi}{2}$ f est donc la composée d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ avec une homothétie de $\Omega(\omega)$ et de rapport 3.