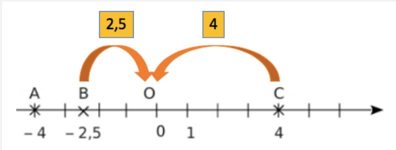
<table>
<tr><th colspan="4">Valeur absolue</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="3">Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel défini par :
$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x \leq 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">$|-2{,}5| = 2{,}5$; $|4| = 4$.</td></tr>
<tr><td>Interprétation Géométrique</td><td>La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0 sur l'axe des réels.
$|\, x - a \,|$ désigne donc la distance séparant a et x sur la droite des réels.</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Propriétés</td><td colspan="3">Conséquence : $\{x \in \mathbb{R}, |\, x - a \,| \leq r\} = [a - r; a + r]$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>$\{x \in \mathbb{R}, |\, x - 3 \,| \leq 7\} = [-4; 10]$</td><td colspan="2">$\{x \in \mathbb{R}, |\, x + 3 \,| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}, |\, x - (-3) \,| \leq 2\}$
$= [-5; -1]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Propriétés</td><td colspan="3">Soient x, y deux réels quelconques.</td></tr>
<tr><td>$|xy| = |x||y|$</td><td>$|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire)</td><td>$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$</td></tr>
<tr><th colspan="4">Preuve</th></tr>
<tr><td colspan="4">Démontrons la troisième inégalité.
L'inégalité triangulaire nous dit que $|x| \leq |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$
De même $|y| \leq |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y|$
Nous avons donc $|x - y| \geq |x| - |y|$ et $|x - y| \geq |y| - |x|$ donc $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exemple</td><td>Résolution d'équation</td><td colspan="2">Résolution d'inéquation</td></tr>
<tr><td>Résolvons $|2x + 1| = 3x - 5$</td><td colspan="2">$|-2x + 3| \geq 3x - 4$</td></tr>
<tr><td>$$2x + 1 \geq 0 \; ssi \; x \geq -\frac{1}{2}$$
Pour $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty]$
$|2x + 1| = 3x - 5$
$\Rightarrow 2x + 1 = 3x - 5$
$\Rightarrow 2x - 3x = -5 - 1$
$\Rightarrow -x = -6$
$\Rightarrow x = 6 \; (6 \in [-\frac{1}{2}; +\infty])$
Pour $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$
$|2x + 1| = 3x - 5$
$\Rightarrow -2x - 1 = 3x - 5$
$\Rightarrow -2x - 3x = -5 + 1$
$\Rightarrow -5x = -4$
$\Rightarrow x = \frac{4}{5} \; (\frac{4}{5} \notin]-\infty, -\frac{1}{2}[)$
Une seule solution semble envisageable $x = 6$.
Vérifions la réciproquement.
$|2 * 6 + 1| = 13 = 3 * 6 - 5$

Nous avons donc bien $S = \{6\}$</td><td colspan="2">$$-2x + 3 \geq 0 \; ssi \; x \leq \frac{3}{2}$$
Pour $x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$
$|-2x + 3| \geq 3x - 4$
$\Rightarrow -2x + 3 \geq 3x - 4$
$\Rightarrow 3 + 4 \geq 3x + 2x$
$\Rightarrow 7 \geq 5x$
$\Rightarrow x \leq \frac{7}{5} \; (]-\infty; \frac{7}{5}] \subset]-\infty; \frac{3}{2}])$
Donc $]-\infty; \frac{7}{5}]$ semble convenir.
Pour $x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$
$|-2x + 3| \geq 3x - 4$
$\Rightarrow 2x - 3 \geq 3x - 4$
$\Rightarrow 4 - 3 \geq 3x - 2x$
$\Rightarrow 1 \geq x$
Or si $x \leq 1, x \notin]\frac{3}{2}; +\infty[$
Le seul intervalle pouvant convenir est $]-\infty; \frac{7}{5}]$. Il est aisé de démontrer réciproquement que si $x \in]-\infty; \frac{7}{5}]$ alors
$$|-2x + 3| \geq 3x - 4$$
Nous avons donc bien $S =]-\infty; \frac{7}{5}]$</td></tr>
</table>