Voisinage

Définitions	Nous allons commencer ce chapitre capital pour plus tard en définissant la notion de voisinage dans $\overline{\mathbb{R}}$ Soit $a \in \mathbb{R}$. Nous appellons voisinage de a dans $\mathbb{R}$ tout ensemble V contenant un segment ouvert de centre a. Cela se traduit ainsi $\exists \varepsilon > 0\ tel\ que\ ]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\ \subset V$ Si $a = +\infty$ Nous appellons voisinage de a dans $\mathbb{R}$ tout ensemble V tel que $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $]A; +\infty[\ \subset V$ Si $a = -\infty$ Nous appellons voisinage de a dans $\mathbb{R}$ tout ensemble V tel que $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; A[\ \subset V$
Exemple	• Un voisinage de 3 est l'intervalle $]1; 10[$ • Un voisinage de $+\infty$ est l'intervalle $]12; +\infty[$ • Un voisinage de $-\infty$ est l'intervalle $]-\infty; 12[$
Propriété	• Pour tout a de $\overline{\mathbb{R}}$ toute intersection de voisinages de a est un voisinage de a • Soient a et b deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$. a et b admettent des voisinages disjoints.

Preuve

- Soient V et W deux voisinages de a.
  - Si $a \in \mathbb{R}$
    $\exists \varepsilon > 0\ tel\ que\ ]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\ \subset V$
    $\exists \varepsilon' > 0\ tel\ que\ ]a-\varepsilon'; a+\varepsilon'[\ \subset W$
    Supposons $\varepsilon \leq \varepsilon'$ dans ce cas $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\ \subset V \cap W$. Donc $V \cap W$ est un voisinage de a
  - Si $a = +\infty$
    $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $]A; +\infty[\ \subset V$
    $\exists B \in \mathbb{R}$ tel que $]B; +\infty[\ \subset W$
    Supposons $B \geq A$ alors $]B; +\infty[\subset V \cap W$, Donc $V \cap W$ est un voisinage de a
  - Raisonnnement symétrique pour $a = -\infty$
- Soient a et b deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$
  - Si $a \in \mathbb{R}$ et b $\in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon = \left|\frac{b-a}{4}\right|$.
    $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ est un voisinage de a.
    $]b-\varepsilon; b+\varepsilon[$ est un voisinage de b. Et ces deux voisinages sont distincts.
  - Si $a \in \mathbb{R}$ et b = $+\infty$.
    $]a-1; a+1[$ est un voisinage de a
    $]a+2; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. Et ces deux voisinages sont distincts.
  - Si $a = +\infty$ et b = $-\infty$.
    $]2; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$
    $]-\infty; -2[$ est un voisinage de $-\infty$. Et ces deux voisinages sont distincts.