Inégalité des accroissements finis

Définition	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $K \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est K −lipschitzienne sur D_f ssi $\forall x, y \in {D_f}^2, \lvert f(x) - f(y)\rvert \leq K\lvert x - y\rvert$
Exemple	La fonction valeur absolue est 1 −lipschitzienne. En effet $\lvert x-y+y\rvert \leq \lvert x-y\rvert + \lvert y\rvert \Longrightarrow \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leq \lvert x-y\rvert$ De même $\lvert y-x+x\rvert \leq \lvert y-x\rvert + \lvert x\rvert \Longrightarrow \lvert y\rvert - \lvert x\rvert \leq \lvert x-y\rvert$ Nous avons donc $\big\lvert \lvert y\rvert - \lvert x\rvert \big\rvert \leq \lvert x-y\rvert$. La fonction valeur absolue est donc bien 1 −lipschitzienne
Théorème	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ une fonction K −lipschitzienne. Alors f est continue sur D_f

Preuve

Soit $x_0 \in D_f$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons y tel que $\lvert y - x_0\rvert < \frac{\varepsilon}{K} \Longrightarrow \lvert f(y) - f(x_0)\rvert \leq \frac{\varepsilon}{K} * K \leq \varepsilon$

On a bien $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ (\eta = \frac{\varepsilon}{K})$ tel que $\lvert y - x_0\rvert < \frac{\varepsilon}{K} \Longrightarrow \lvert f(y) - f(x_0)\rvert \leq \frac{\varepsilon}{K} * K \leq \varepsilon$. C'est la définition de la continuité en x_0

Théorème	Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. On suppose que f' est bornée sur I. f' admet donc une borne infinie finie : $\lVert f'\rVert_\infty$ Alors f est $\lVert f'\rVert_\infty$ −lipschitzienne sur I.

Preuve

- Dans le cas où f est réelle.
  Soient x et y appartenant à I. L'égalité des accroissements finis nous donne :
  $\exists c \in I\ tel\ que\ f(y) - f(c) = f'(c)(x-y) \Longrightarrow \lvert f(y) - f(c)\rvert = \lvert f'(c)\rvert\lvert (x-y)\rvert \Longrightarrow \lvert f(y) - f(c)\rvert \leq \lVert f'\rVert_\infty \lvert x - y\rvert$
  f est donc bien $\lVert f'\rVert_\infty$ −lipschitzienne sur I

- Dans le cas où f est complexe.
  Posons x et y appartenant à I. $f(y) - f(x)$ est un nombre complexe que nous pouvons mettre sous sa forme trigonométrique : $\rho e^{i\theta}$. Donc le nombre $e^{-i\theta}(f(y) - f(x))$ est un nombre réel
  Posons $\varphi: \begin{Bmatrix} I \to \mathbb{R} \\ t \to Re(e^{-i\theta} f(t)) \end{Bmatrix}$
  $$\lvert f(y) - f(x)\rvert = \lvert e^{-i\theta}\rvert \lvert f(y) - f(x)\rvert = \left\lvert e^{-i\theta}\big(f(y) - f(x)\big)\right\rvert$$
  Or $e^{-i\theta}\big(f(y) - f(x)\big) \in \mathbb{R}$ donc $\lvert f(y) - f(x)\rvert = \left\lvert Re(e^{-i\theta}\big(f(y) - f(x)\big))\right\rvert = \left\lvert Re(e^{-i\theta} f(y)) - Re(e^{-i\theta} f(x))\right\rvert$
  $$\lvert f(y) - f(x)\rvert = \lvert \varphi(y) - \varphi(x)\rvert$$
  φ est une fonction réelle. φ est dérivable sur I car f est dérivable sur I ($e^{-i\theta}$ est une constante)
  $\varphi'(t) = Re(e^{-i\theta} f(t))' = Re(e^{-i\theta} f'(t))$
  Nous avons $\forall t \in I, \lvert \varphi'(t)\rvert \leq \left\lvert Re\left(e^{-i\theta} f'(t)\right)\right\rvert \leq \left\lvert e^{-i\theta} f'(t)\right\rvert \leq \lvert f'(t)\rvert \leq \lVert f'\rVert_\infty$
  Appliquons maintenant l'inégalité des AF à φ fonction réelle.
  $$\lvert \varphi(y) - \varphi(x)\rvert \leq \lVert f'\rVert_\infty \lvert y - x\rvert$$
  Or nous savons que $\lvert \varphi(y) - \varphi(x)\rvert = \lvert f(y) - f(x)\rvert$
  Nous avons donc bien $\lvert f(y) - f(x)\rvert \leq \lVert f'\rVert_\infty \lvert y - x\rvert$
  f est bien une fonction $\lVert f'\rVert_\infty$ −lipschitzienne sur I

Exemple	Soit $f(x) = sinx$. f définie sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = \cos x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ \lvert f'(x)\rvert \leq 1$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x quelconque. Il vient $\forall x \in \mathbb{R}, \lvert f(x) - f(0)\rvert \leq 1\lvert x - 0\rvert \leq \lvert x\rvert \Longrightarrow \lvert sinx\rvert \leq \lvert x\rvert$