

Suites Récurrentes.

Remarque	Les suites récurrentes ont pour l'instant été définies d'une manière simple par un premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. f étant une fonction dont l'ensemble de définition comprend u_0 . Mais si u_0 est bien dans l'ensemble de définition de f , qu'est-ce qui nous garantit que u_1 sera lui aussi dans l'ensemble de définition de f pour nous permettre de calculer u_2 . Et u_2 ? sera-t-il lui aussi dans l'ensemble de définition de f pour nous permettre le calcul de u_3 ? Bref il semble qu'il faille imposer quelques conditions sur f pour que tous les termes de la suite (u_n) définie par $\begin{matrix} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{matrix}$ soient tous calculables.
Définition	Une partie I de $\mathbb{R}$ est dite stable par une fonction f ssi $f(I) \subset I$
Exemple	L'intervalle $[0, 1]$ est stable pour la fonction $f: x \rightarrow x(1-x)$. Pour s'en convaincre nous pouvons étudier la fonction f , tableau de variation à l'appui ou tout simplement remarquer que le produit de deux nombres entre 0 et 1 est un nombre entre 0 et 1.
Théorème d'existence	Soit I une partie de $\mathbb{R}$, x un réel appartenant à I et f une fonction telle que $I \subset D_f$ et laissant stable I . Alors la suite définie par $\begin{matrix} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{matrix}$ est définie de manière unique et possède une infinité de termes tous éléments de I

Exemples : Etude de suites définies par récurrence.

- Soit (u_n) définie par $\begin{matrix} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(1-u_n)} \end{matrix}$. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$

$\frac{1}{4} \in [0, 1]$, $[0, 1] \subset D_f$ et $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Le dernier point se démontre aisément : Nous avons déjà vu que la fonction $x \rightarrow x(1-x)$ laisse stable $[0, 1]$ mais la fonction racine aussi. Nous en déduisons donc que la composée des deux laisse stable $[0, 1]$. La suite (u_n) est donc parfaitement définie et tous ses termes appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$. L'étude d'une éventuelle convergence est plus compliquée. Nous ne la ferons pas ici.

- Soit (v_n) définie par $\begin{matrix} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + \sqrt{v_n} \end{matrix}$. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x}$

La racine dans l'expression de f nous met en garde sur le fait que tous les termes de la suite v_n doivent être positifs si l'on veut être capable de déterminer leur successeur. Nous pourrions démontrer que $\mathbb{R}^+$ est stable par f mais nous allons faire mieux que cela : nous allons démontrer que l'intervalle $[0; 4]$ est stable pour la fonction f .

si $0 \leq x \leq 4$ alors $0 \leq \frac{x}{2} \leq 2$ et $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$ donc $0 \leq \frac{x}{2} + \sqrt{x} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$

donc $f([0; 4]) \subset [0; 4]$ et $v_0 \in [0; 4]$ et ce qui signifie que **l'on pourra calculer n'importe quel terme de la suite.**
Etudions l'éventuelle convergence de la suite (v_n)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n}{2} + \sqrt{v_n} - v_n = \sqrt{v_n} - \frac{v_n}{2} = \frac{(\sqrt{v_n} - \frac{v_n}{2})(\sqrt{v_n} + \frac{v_n}{2})}{\sqrt{v_n} + \frac{v_n}{2}} = \frac{v_n - \frac{v_n^2}{4}}{\sqrt{v_n} + \frac{v_n}{2}} = \frac{v_n(1 - \frac{v_n}{4})}{\sqrt{v_n} + \frac{v_n}{2}}$$

Nous savons que $\forall n, \sqrt{v_n} + \frac{v_n}{2} \geq 0$ et $v_n \geq 0$. De plus $\forall n, 0 \leq v_n \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{v_n}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{v_n}{4} \leq 1$

Nous en déduisons donc que $\forall n, \frac{v_n(1 - \frac{v_n}{4})}{\sqrt{v_n} + \frac{v_n}{2}} \geq 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n \geq 0 \Rightarrow (v_n)$ **croissante**.

Or la suite (v_n) est majorée par 4. Donc d'après le théorème de la limite monotone (v_n) admet une limite l . Essayons de déterminer cette limite. Nous savons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ (avec $l \in [0; 4]$) et nous savons aussi que $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$ puisque la fonction f est définie et continue sur $[0; 4]$.

Nous avons donc grâce au théorème de composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(l)$

Revenons à la formule de récurrence $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + \sqrt{v_n} = f(v_n)$

Faisons tendre n vers $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(l)$. **l est donc solution de l'équation $l = f(l)$**

Réolvons la : $l = \frac{l}{2} + \sqrt{l} \Rightarrow \frac{l}{2} = \sqrt{l} \Rightarrow \begin{cases} l=0 \\ ou \\ \frac{\sqrt{l}}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=0 \\ ou \\ \sqrt{l} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=0 \\ ou \\ l=4 \end{cases}$. La solution nulle est à exclure car (v_n) croissante et $v_0 = 1$. Nous avons donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$	
Théorème	Etudions la monotonie d'une suite récurrente. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ stable pour une fonction f. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in D \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ La suite est donc parfaitement définie. Nous allons pouvoir déterminer l'éventuelle monotonie de la suite en fonction de certains critères. - Si $\forall x \in D \ f(x) \geq x$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante Si $\forall x \in D \ f(x) \leq x$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante - Si f est croissante sur D alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donné par le signe de $u_1 - u_0$. Si $u_1 \leq u_0$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, sinon croissante. - Si f est décroissante sur D alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites monotones aux sens de variation opposés. Leur sens de variation dépendant de $u_2 - u_0$
	Preuve
Si $\forall x \in D \ f(x) \geq x$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, si $f(x) \leq x$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Si $f(u_n) \geq u_n$ alors $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante Si $f(u_n) \leq u_n$ alors $u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante Si f est croissante sur D alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donné par le signe de $u_1 - u_0$ Nous traiterons ici le cas où $u_1 - u_0 \geq 0$. Montrons par récurrence que $\forall n, u_{n+1} \geq u_n$ L'initialisation est donnée par l'hypothèse de départ. Supposons qu'au rang $n : u_{n+1} \geq u_n$ alors en composant à droite et à gauche par f une fonction croissante il vient : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$. L'hérédité est donc démontrée. La démonstration est symétrique dans le cas où $u_1 - u_0 \leq 0$. Si f est décroissante sur D alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites monotones aux sens de variation opposés. Remarquons tout d'abord que si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante. En effet $x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f décroissante) $\Rightarrow f \circ f(x) \geq f \circ f(y)$ Remarquons ensuite que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \end{cases}$ Nous en déduisons donc d'après le point précédent que si $u_2 \leq u_0$ alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sera décroissante et si $u_2 \geq u_0$ alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sera croissante Mais si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante cela implique $u_{2n+2} \leq u_{2n} \Rightarrow f(u_{2n+2}) \geq f(u_{2n}) \Rightarrow u_{2n+3} \geq u_{2n+1}$ donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sera croissante. De même si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante cela implique $u_{2n+2} \geq u_{2n} \Rightarrow f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) \Rightarrow u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sera décroissante.	
Théorème	Le théorème suivant est bien utile pour, une fois l'existence d'une limite établie, déterminer sa valeur. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction laissant D stable. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in D \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Cette suite est donc parfaitement définie. Soit $l \in \mathbb{R} \cap D$. Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et f continue en l alors l est solution de l'équation $l = f(l)$ l est dit alors point fixe de la fonction f.
	Preuve
Nous savons déjà d'après le théorème de composition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow l} f(x)$. Or f est continue et définie en l donc $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$. Il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$. Passons à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ et nous obtenons $l = f(l)$	
Exemple	Des exemples d'utilisation des deux théorèmes précédents sont vus dans la fiche : <u>exemples_limites_suites_recurrentes</u> .