

Arcsin		
Définition	La restriction de la fonction $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ notée f et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bijective. ($\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, f'(x) = 1 + \tan^2 x$ on a donc $f'(x) > 0$, f est donc strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et continue) Elle admet donc une réciproque f^{-1} que nous appellerons $\arctan$ La fonction $\arctan$ est donc définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	
Propriétés	$\forall x \in \mathbb{R} , \tan(\arctan x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Preuve	Découle directement de la définition.	$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + \tan^2(\arctan x) = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)}$ (Rappel : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{(1 + \tan^2(\arctan x))}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\arctan x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ▫
Propriétés	$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan (-x) = -\arctan(x)$. La fonction est impaire.
Preuve	$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(\arctan x) = 1 - \cos^2(\arctan x)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(\arctan x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$ Si $x \leq 0, \arctan x \in]-\frac{\pi}{2}; 0]$, donc $\sin x \leq 0$ Si $x \geq 0, \arctan x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, donc $\sin x \geq 0$ Donc $\sin (\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ▫	$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(-\arctan(x)) = -\tan \arctan (x) = -x$ $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan (-x)) = -x$ $-\arctan(x)$ et $\arctan (-x)$ sont deux réels de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ayant même $\tan$. La fonction $\tan$ étant bijective sur cet intervalle nous en déduisant que $-\arctan(x) = \arctan(-x)$ ▫
Remarque	Attention $\arctan(\tan x)$ n'est pas toujours égal à x . Exemple $\arctan \left(\tan \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right) = \arctan \left(\tan \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{6}$	
Propriété	La fonction $\arctan$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
Preuve		
La fonction $\arctan$ est la réciproque d'une fonction continue et monotone sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ On en déduit la continuité de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$ Soit f définie par $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, f(x) = \tan x . f'(x) = 1 + \tan^2 x$, f' ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ Donc f étant une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas, il vient f^{-1} donc $\arctan$ dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan(x))' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos^2 \arctan x} = \frac{1}{1+x^2}$ ▫		
Courbe		