Majorants, Minorants.	
Préambule	Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$
Définition	• On dit que A est majorée ssi $\exists M > 0, \forall x \in A, x \leq M$. On dit aussi que M est un majorant de A • On dit que A est minorée ssi $\exists m > 0, \forall x \in A, x \geq m$. On dit aussi que m est un minorant de A • On dit que A est bornée ssi $\exists B > 0, \forall x \in A, \lvert x\rvert \leq B$. Une partie bornée est une partie à la fois majorée et minorée.
Exemple	Soit $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. A est minorée par 0 mais aussi par -1
Remarque	Un majorant ou un minorant n'est jamais unique. On préférera donc l'article indéfini à l'article défini.
Définition	• On appelle plus grand élément de A ou maximum de A tout élément de A qui majore A. • On appelle plus petit élement de A ou minimum de A tout élément de A qui minore A
Théorème	Si A admet un plus grand élement (ou plus petit) alors il est unique.
Preuve	
Soient a et b deux plus grands élements de A. a majore A donc $b \leq a$. b majore A donc $a \leq b$. Il vient $a = b$.	
Exemple	L'intervalle $]3;4]$ admet un plus grand élément. C'est 4. Remarquons que cet intervalle n'admet pas de plus petit élement. En effet supposons qu'il en ait un que nous nomerons x_0. $x_0 \in]3;4]$ donc $x_0 > 3$. Le nombre $\frac{x_0+3}{2} \in]3;4]$ et est strictement inférieur à x_0. Nous sommes donc arrivés à une contradiction, x_0 ne peut pas être le plus petit élement de $]3;4]$.
Théorème (admis)	• Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élement. • Tout partie majorée dans $\mathbb{N}$, non vide, admet un plus grand élement.

Bornes sup, inf	
Préambule	Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$
Définition	• Le plus petit des majorants de A, s'il existe, est appelé la $borne\ supérieure$ de A et noté $\sup A$ • Le plus grand des minorants de A, s'il existe, est appelé la $borne\ inférieure$ de A et noté $\inf A$
Exemple	L'intervalle $]3;4]$ admet une $borne\ inférieure$ qui est 3. Preuve : 3 est clairement un minorant de A. Supposons qu'il ne soit pas le plus grand des majorants. Suppons qu'il existe un réel x tel que $x > 3$ et x minorant de A. $\frac{3+x}{2} \in A$ et $\frac{3+x}{2} < x$ Nous sommes donc arrivés à une contradiction. x ne peut pas être un minorant de A. L'intervalle $]3;4]$ possède donc un plus grand élement qui est 4, ne possède pas de plus petit élement mais possède par contre une $borne\ inférieure$ qui est 3.
Théorème	Si A possède un plus petit élement alors A possède une $borne\ inférieure$ et $\min A = \inf A$ Si A possède un plus grand élement alors A possède une $borne\ supérieure$ et $\max A = \sup A$
Preuve	
Soit x le plus petit élément de A. Soit M l'ensemble des minorants de A. • M est non vide puisque $x \in M$ • $\forall y \in M, y \leq x$ puisque $x \in M$. Donc x est le plus grand élément de M. x est le plus grand des minorants. $\min A = \inf A$	
Exemple	$]3;4]$ possède un plus grand élement qui est 4. On a donc $\sup\ ]3;4] = \max]3;4] = 4$

<table>
<tr><td>Propriétés</td><td>On suppose que A et B possèdent tous deux une borne inférieure.
• $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$
• $A \cup B$ possède une $borne\ inférieure$ et $\inf A \cup B = Min\ (\inf A, \inf B)$
• Soit $A + B = \{x, x = a + b\ avec\ a \in A\ et\ b \in B\}$. $A + B$ possède une borne inférieure.
$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda A = \{x, x = \lambda a\ avec\ avec\ a \in A\}$. λA possède une borne inférieure.
$\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$
Bien entendu nous aurions des résultats similaires si A et B possédaient une borne supérieure.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preuve</td></tr>
<tr><td colspan="2">• $\inf B$ est un minorant de B. $A \subset B$. Donc $\inf B$ est un minorant de A. $\inf A$ est le plus grand des minorants de A. Donc $\inf B \leq \inf A$

• $Min\ (\inf A, \inf B) \leq \inf A$ et $Min\ (\inf A, \inf B) \leq \inf B$ Donc $Min\ (\inf A, \inf B)$ minore A et B.
$\forall x \in A \cup B, x \in A\ ou\ x \in B \Rightarrow x \geq Min\ (\inf A, \inf B)$
$Min\ (\inf A, \inf B)$ est donc un minorant de $A \cup B$
Soit s un autre minorant de $A \cup B$ vérifiant $s > Min\ (\inf A, \inf B)$
Supposons $\inf A \leq \inf B$, $s > \inf A$ donc s ne minore pas $A \Rightarrow \exists x \in A, s > x$
Or $x \in A \cup B$ et s minorant de $A \cup B$ donc $x \geq s$. Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

• $A + B = \{x, x = a + b\ avec\ a \in A\ et\ b \in B\}$. $\forall a \in A, a \geq \inf A$ et $\forall b \in B, b \geq \inf B$
Donc $\forall (a, b), a + b \geq \inf A + \inf B$.
$\forall x \in A + B, x \geq \inf A + \inf B$ Donc $\inf A + \inf B$ est un minorant de $A + B$
Supposons s un autre minorant de $A + B$ vérifiant $s > \inf A + \inf B\ (*)$
$s - \inf A > \inf B$ Donc $s - \inf A$ ne minore pas B. $\exists b \in B, b > s - \inf A$
$s - b \geq s - \inf B$ et $s - \inf B > \inf A\ (*)$ Donc $s - b > inf\ A$, donc $s - b$ ne minore pas A.
$\exists a \in A, s - b > a \Rightarrow s > b + a$
Nous sommes arrivés à une contradiction avec s minorant de $a + b$

• $\lambda A = \{x, x = \lambda a\ avec\ avec\ a \in A\}$
$\forall a \in A, a \geq \inf A \Rightarrow \forall a \in A, \lambda a \geq \lambda \inf A$
Donc $\lambda \inf A$ est un minorant de λA.
Remarquons que si $\lambda = 0, \inf(\lambda A) = \lambda \inf A$ est trivial. Nous pouvons donc supposer $\lambda \neq 0$
Soit s un autre minorant de λA vérifiant $s > \lambda \inf A$. Nous avons $\frac{s}{\lambda} > \inf A$
$\frac{s}{\lambda}$ n'est donc pas un minorant de A. $\exists a \in A, \frac{s}{\lambda} > a \Rightarrow s > a\lambda$
Mais dans ce cas s ne peut pas être un minorant de λA. Nous sommes bien arrivés à une contradiction.</td></tr>
<tr><td>Théorème (admis).</td><td>• Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une $borne\ supérieure$
• Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une $borne\ inférieure$.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>Soit $y \in \mathbb{R}^{*+}, A_y = \{ x, e^x \geq y\}$
Nous savons que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc A_y est non vide.
Nous savons que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0\ \exists x_0,\ \forall x \leq x_0, e^x < y$. A_y est donc minorée par x_0
A_y étant non vide et minorée, nous pouvons en déduire qu'elle admet une $borne\ inférieure$.
Cette $borne\ inférieure$ nous la connaissons, elle est notée $\ln y$</td></tr>
</table>