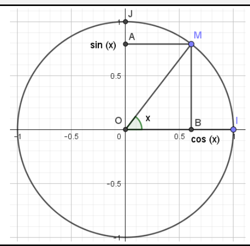
Coordonnées d'un point sur le cercle trigonométrique. cosinus et sinus

Définition (Rappel)

La relation de congruence se définit ainsi. Soient x, y, z trois réels. On dit que x est congrus à y modulo z et on note $x \equiv y[z]$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + kz$

Définition

Pour tout nombre réel x, le cosinus et le sinus de x, notés $\cos x$ *et* $\sin x$ sont les coordonnées du point M_x image de x sur le cercle trigonométrique. On écrit alors $M_x(\cos x\,;\sin x)$.



Exemples

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour se convaincre de tels résultats, une simple utilisation du théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique devrait faire l'affaire.

Propriétés

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ ou \\ x \equiv -y[2\pi] \end{cases}$$

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ ou \\ x \equiv \pi - y[2\pi] \end{cases}$$

Preuve

Un simple coup d'œil au cercle trigonométrique devrait suffire.

Exemple

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ ou \\ x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \\ ou \\ x \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$$

Propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Preuve

Utilisation du théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique.

Propriétés

Soit $a \in \mathbb{R}$

$\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Preuve

Ces propriétés se lisent aisément sur le cercle trigonométrique.

Propriétés

$\cos(x+y) = \cos x cos\ y - \sin x sin\ y$ (3)

$\cos(x-y) = \cos x cos\ y + \sin x sin\ y$ (4)

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ (1)

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$ (2)

Preuve

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos x \\ \sin x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos y \\ \sin y\end{pmatrix}$.

$\vec{u}.\vec{v} = \cos x cos\ y + \sin x sin\ y = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(x-y) = \cos(y-x) = \cos(x-y)$ ▫

De même avec le changement de variable $y' = -y$

$\cos x cos\ y - \sin x sin\ y = \cos x cos\ (-y) + \sin x sin\ (-y) = \cos x cos\ (y') + \sin x sin\ (y') = \cos(x - y') = \cos(x+y)$ ▫

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos x \\ \sin x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sin y \\ \cos y\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}.\vec{v} = \cos x\ sin\ y + \sin x\ cos\ y = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y - x\right) = \sin(y+x) \ ▫$$

De même avec le changement de variable $y' = -y$

$$\sin x\ cos\ y - \cos x\ sin\ y = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y) = \sin(x)\cos y' + \cos x sin\ y' = \sin(x + y') = \sin(x-y) \ ▫$$

Propriété

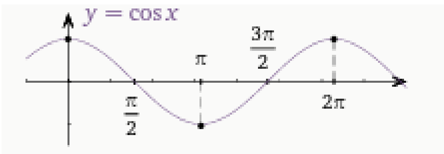
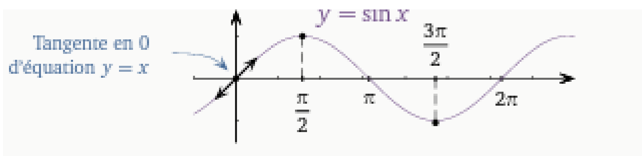
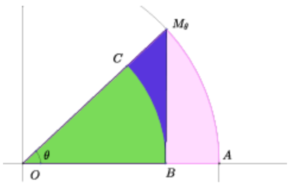
$$\cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 = cos^2(x) - sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x cos\ x$$

Preuve

$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x cos\ x - \sin x sin\ x = cos^2(x) - sin^2 x = cos^2(x) - (1 - cos^2(x)) = 2cos^2(x) - 1$ ▫

$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x cos\ x + \cos x sin\ x = 2\cos x \sin x$ ▫

Propriété	$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(y+x)+\cos(x-y)]$ (5)	$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$ (7)
	$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(y+x)+\sin(x-y)]$ (6)	$\cos x\sin y = \frac{1}{2}[\sin(y+x)-\sin(x-y)]$ (8)
Preuve	$(3)+(4)$	$(4)-(3)$
	$(1)+(2)$	$(1)-(2)$
Propriété	$\cos p+\cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin p+\sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
	$\cos p-\cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin p-\sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
Preuve	Poser $p = x+y, q = x-y$ (5) nous donne : $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▫ Posons $q' = q+\pi$ $\cos p-\cos q = \cos(p)+\cos(q+\pi) = \cos(p)+\cos(q') = 2\cos\left(\frac{p+q'}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q'}{2}\right) =$ $2\cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▫	Poser $p = x+y, q = x-y$ (6) nous donne : $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▫ $\sin(p)-\sin(q) = \sin(p)+\sin(-q)$ $= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ ▫
Propriété	La fonction cos est paire, 2π périodique.	La fonction sin est paire, 2π périodique.
Preuve	$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x.$ $\forall x \in \mathbb{R}\cos(2\pi+x) = \cos x$ Donc la parité et la périodicité sont montrées.	$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x.$ $\forall x \in \mathbb{R}\sin(2\pi+x) = \sin x$ Donc la parité et la périodicité sont montrées.
Courbes		
Propriété	$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$	$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$
Preuve	Plaçons-nous dans le cercle trigonométrique de centre 0 et de rayon OA. L'aire du triangle OBM_θ est comprise entre l'aire du secteur angulaire $\widehat{OBC}$ et l'aire du secteur angulaire $\widehat{OBM_\theta}$	
	$Aire\ \left(\widehat{OBC}\right) = \frac{\pi(OB)^2}{2\pi}\theta = \frac{\pi\theta cos^2(\theta)}{2\pi} = \frac{\theta cos^2(\theta)}{2}$ $Aire\ \left(\widehat{OAM_\theta}\right) = \frac{\pi(OA)^2}{2\pi}\theta = \frac{\pi\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2}$ $Aire\ (OBM_\theta) = \frac{OB*BM_\theta}{2} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{2}$ Donc $\frac{\theta cos^2(\theta)}{2} \leq \frac{\cos\theta\sin\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2}$ $\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}, \forall\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$ Or $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\cos\theta} = 1$ donc $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ $\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$ Donc $\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ▫	$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \frac{\cos 0-\cos\theta}{\theta} = -2\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)}{\theta}$ $= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}} * \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = 1, \lim_{\theta\to 0}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ donc $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$ ▫

Propriété	La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)'(x) = -\sin x$	La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin)'(x) = \cos x$
Preuve	$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\cos(x+\varepsilon) - \cos(x)}{\varepsilon}$ $= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} -2 \dfrac{\sin\left(\frac{2x+\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$ $= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} - \dfrac{\sin\left(\frac{2x+\varepsilon}{2}\right) \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\frac{\varepsilon}{2}}$ Or $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\frac{\varepsilon}{2}} = 1$ comme vu précédemment, et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sin\left(\frac{2x+\varepsilon}{2}\right) = \sin x$ par continuité de la fonction sin. Il vient $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\cos(x+\varepsilon) - \cos(x)}{\varepsilon} = sinx$ ▫ Ce qui prouve la dérivabilité de cos sur $\mathbb{R}$ et donne son nombre dérivé.	$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)}{\varepsilon}$ $= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} - 2 \dfrac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$ $= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+\varepsilon}{2}\right)}{\frac{\varepsilon}{2}}$ Or $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\frac{\varepsilon}{2}} = 1$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \cos\left(\frac{2x+\varepsilon}{2}\right) = \cos x$ Donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)}{\varepsilon} = \cos x$ ▫ Ce qui prouve la dérivabilité de cos sur $\mathbb{R}$ et donne son nombre dérivé.