

Ex1

Enoncé

Soit P la fonction polynomiale définie par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P s'annule au moins une fois dans $]0; 1[$

Solution

P est continue et dérivable sur $[0; 1]$. $P(0) = 2$. $P(1) = 3 - 11 + 12 - 4 + 2 = 2$.

$P(0) = P(1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe c dans $]0; 1[$ tel que $P'(c) = 0$

Ex2

Enoncé

Soient f et g deux fonctions $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$
On suppose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$. Montrer qu'il existe c dans $]a; b[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$$

Solution

On considère pour cela la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = (f(a) - f(b))g(x) - (g(a) - g(b))f(x)$

Par construction F est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$

$F(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a)$; $F(b) = g(b)f(b) - f(b)g(b)$; Donc $F(a) = F(b)$

L'application du théorème de Rolle à F nous amène l'existence d'un c dans $]a; b[$ tel que $F'(c) = 0$

Or $F'(x) = (f(a) - f(b))g'(x) - (g(a) - g(b))f'(x)$

Donc $F'(c) = 0 \Rightarrow (f(a) - f(b))g'(c) - (g(a) - g(b))f'(c) = 0 \Rightarrow (f(a) - f(b))g'(c) = (g(a) - g(b))f'(c)$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}. \text{ En effet } f(a) \neq f(b) \text{ et } g(a) \neq g(b)$$

Ex3

Enoncé

Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynomiale P définie par $P(x) = x^n + px + q$ admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

Solution

Soient α et β deux racines de P réelles consécutives. $P(\alpha) = P(\beta) = 0$

P est un polynôme. Il est donc continu et dérivable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de Rolle appliqué au polynôme P il existe γ dans $] \alpha; \beta[$ tel que $P'(\gamma) = 0$

Donc entre deux racines de P réelles consécutives il existe une racine réelle de P'

$$P'(x) = nx^{n-1} + p$$

- Si n est pair, $n - 1$ est impair. Donc l'équation $nx^{n-1} + p = 0$ n'admet qu'une seule solution réelle: $\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$
 P' ne peut s'annuler dans $\mathbb{R}$ qu'une fois. Donc d'après la propriété précédente P ne peut avoir plus que deux racines réelles.

- Si n est impair, $n - 1$ est pair. Considérons l'équation $nx^{n-1} + p = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = -\frac{p}{n}$

Si $\frac{p}{n} > 0$ alors cette équation n'admet pas de solution réelle.

Si $\frac{p}{n} < 0$ alors cette équation a deux solutions réelles : $\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$ et $-\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$.

Dans les deux cas et d'après la propriété précédente, P ne peut avoir plus de 3 racines réelles successives.

Ex4**Enoncé**

Soit f une fonction : $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{**}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$
 Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)$

Solution

Soit g la fonction définie sur $[a; b]$ par $g(x) = \ln(f(x))$. g est définie car $f > 0$ sur $[a; b]$
 g est continue sur $[a; b]$ comme composée de fonctions continues et dérivable sur $]a; b[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]a; b[, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

D'après l'égalité des accroissements finis nous avons $\exists c \in]a; b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$

$$\text{Soit } \ln(f(b)) - \ln(f(a)) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a) \Rightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a) \Rightarrow \frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)$$

Ex5

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que $\forall x > 0$ $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$
2. En déduire que les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^{**}$ par $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ et $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ sont monotones.
3. Déterminer les limites en $+\infty$ de $\ln f$, $\ln g$, f et g .

Solution

1. Soit $x > 0$, la fonction $\ln$ est continue sur $[x; x+1]$ et dérivable sur $]x; x+1[$. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
 Le théorème des accroissements finis nous donne donc $\exists c \in]x; x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}(x+1-x)$
 $\Rightarrow \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$ avec $c \in]x; x+1[$
 Nous avons donc $\ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ et $\ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x+1}$ ce qui nous amène à $\frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x+1}$

2. Soit $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$. Remarquons que $\forall x > 0, f(x) > 0, \ln f(x)$ est donc défini

$$\ln(f(x)) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{**}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$[\ln(f(x))]'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} * \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$$

D'après la première question cette quantité est positive. Nous en déduisons que $\ln f$ est croissante sur $\mathbb{R}^{**}$.
 Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^{**}$ (Il suffit de composer par la fonction exponentielle qui elle aussi est croissante)

Soit $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1} = e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})}$. Remarquons que $\forall x > 0, g(x) > 0, \ln g(x)$ est donc défini

$$\ln(g(x)) = (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{**}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$[\ln(g(x))]'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x+1) \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} * \frac{x+1}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$$

D'après la première question cette quantité est négative. Nous en déduisons que $\ln g$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{**}$.
 Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^{**}$ (Il suffit de composer par la fonction exponentielle qui elle est croissante)

3. Nous avons $\frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x+1} \Rightarrow 1 > x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{x}{x+1}$ (Pour $x > 0$) $\Rightarrow 1 > \ln f(x) > \frac{x}{x+1}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = e$ (il suffit de composer avec la fonction exponentielle qui est continue)

Nous avons $\frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{x+1}{x} > (x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x} > \ln g(x) > 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(g(x)) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)) = e$ (il suffit de composer avec la fonction exponentielle qui est continue)

Ex6

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$
Montrer alors que pour un certain c dans l'intervalle $]a; b[$ $f^{(3)}(c) = 0$

Solution

$f(a) = f(b)$, f continue et dérivable sur $[a; b]$ donc $\exists \alpha \in]a; b[$ tel que $f'(\alpha) = 0$ (Théorème de Rolle)
 f' s'annule donc en trois valeurs distinctes : a, α et b .

Le théorème de Rolle appliqué à f' d'abord sur l'intervalle $[a; \alpha]$ puis $[\alpha, b]$ nous donne donc l'existence de deux réels distincts : β et γ l'un dans $]a; \alpha[$, l'autre dans $] \alpha; b[$ tels que $f''(\beta) = f''(\gamma) = 0$

Il nous reste plus qu'à appliquer le théorème de Rolle une dernière fois sur f'' sur $] \beta; \gamma[$

$\exists \lambda \in] \beta; \gamma[$ tel que $f^{(3)}(\lambda) = 0$.

Bien entendu si $\lambda \in] \beta; \gamma[$ alors $\lambda \in]a; b[$