Equations différentielles et primitive.

Définition	<p>Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y, ses dérivées successives $y', y'' \dots$ et éventuellement d'autres fonctions (constantes, $g \dots$).</p> <p>Soit F une fonction à plusieurs variables. Une équation différentielle d'inconnue y peut donc s'écrire :</p> $F(y, y', y'', \dots)(x) = g(x)$ <p>avec g fonction quelconque</p>
Exemple	<p>L'équation $y'' - y = 0$ est une équation différentielle de fonction inconnue y. En voici d'autres :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $2y' + 3y = \ln(x)$ • $y'(t) = y^2(t) + 5t + 1$ • $y' = 2y + x^2$
Définition	<p>On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction dérivable justifiant l'égalité. Résoudre une équation différentielle c'est donc trouver toutes les fonctions solutions de cette égalité.</p>
Exemple	<p>La fonction $f: x \rightarrow e^{-x}$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$. En effet $f'(x) = -e^{-x}$ et $f''(x) = +e^{-x} = f(x)$ donc $f''(x) - f(x) = 0$</p>
Définition	<p>Soit F une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. F est dite linéaire ssi $\forall x, y, \lambda, \mu$ réels</p> $F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$
Exemple	<p>La fonction $g: x \rightarrow 3x$ est une fonction linéaire.</p>
Définition	<p>Soit F une fonction à plusieurs variables définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. F est dite linéaire ssi chacune de ses fonctions coordonnées est linéaire :</p> $\forall i \text{ avec } 1 \leq i \leq n, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$ $F(x_1, x_2, \dots, \lambda x_i + \mu y_i, \dots, x_n) = \lambda F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) + \mu F(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_n)$
Définition	<p>Une équation différentielle linéaire est une équation du type : $F(y, y', y'', \dots)(x) = g(x)$ avec g fonction quelconque et F une fonction linéaire.</p>
Exemple	<ul style="list-style-type: none"> • L'équation $2y' + 3y = \ln(x)$ est une équation différentielle linéaire. • L'équation $y'(t) - y^2(t) = 5t + 1$ n'est par contre pas linéaire.
Définition	<ul style="list-style-type: none"> • Une équation différentielle homogène est une équation différentielle sans second membre. C'est-à-dire du type : $F(y, y', y'', \dots)(x) = 0$ • Une équation différentielle de degré n est une équation différentielle faisant intervenir la dérivée n ième de y et les dérivées de y d'ordre inférieur. C'est-à-dire du type : $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)})(x) = g(x)$ avec g fonction quelconque.
Exemple	<ul style="list-style-type: none"> • L'équation $2y' + 3y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène ou sans second membre. • L'équation $y'(t) - y^2(t) = 5t + 1$ est une équation différentielle du premier degré.