Suites Récurrentes.

Exercice1	Etudions la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = {u_n}^2 + 1$

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + 1$ il est facile de remarquer que $D_f = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ étant stable par f la suite est donc parfaitement définie. $u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 - u_n + 1$. Considérons le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - x + 1$. $\Delta = -3$.
Le polynôme est donc de signe constant (du signe de 1 donc positif). $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
Si (u_n) était bornée elle serait convergente. (Théorème de la limite monotone). Si (u_n) était convergente vers un réel l la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ nous donnerait en passant à la limite (f étant continue sur $\mathbb{R}$) $l = f(l)$.
$l = f(l)$ se traduit par $l = l^2 + 1 \Longrightarrow l^2 - l + 1 = 0$ Or nous avons déjà vu que ce polynôme n'admettait pas de racines.
Donc (u_n) n'est pas majorée. Etant croissante, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = +\infty$

Exercice 2	Etudions la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$ il est facile de remarquer que $D_f = [-1;\ +\infty[$
D_f est stable par f la suite est donc parfaitement définie.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n = \frac{\left(\sqrt{1+u_n} - u_n\right)\left(\sqrt{1+u_n} + u_n\right)}{\sqrt{1+u_n} + u_n} = \frac{(1 + u_n - {u_n}^2)}{\sqrt{1+u_n} + u_n}$$

Une récurrence immédiate nous montrerait facilement que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$ ce qui implique $\sqrt{1+u_n} + u_n > 0$
$\sqrt{1+u_n} + u_n \geq 0$ et $-{u_n}^2 + u_n + 1 = Q(u_n)$. Déterminons le discriminant de Q. $\Delta = 5$ ce polynome admet deux racines $z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$;
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq z_2$
L'initialisation est évidente. De plus $u_n \geq z_2 \Longrightarrow \sqrt{1+u_n} \geq \sqrt{1+z_2} \geq \sqrt{(z_2)^2} \geq z_2$ donc $u_{n+1} \geq z_2$. L'hérédité est aussi montrée. u_n étant donc à l'extérieur des racines de $Q, Q(u_n) \geq 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0 \Longrightarrow (u_n)$ est croissante.

Si (u_n) converge vers une limite l alors, f étant continue, l vérifie $l = f(l) \Longrightarrow l = \sqrt{1+l} \Longrightarrow l^2 - l - 1 = 0$
Ce polynôme admet deux racines $l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La première racine étant négative, (u_n) étant croissante ne peut converger que vers l_2.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq l_2$. Même raisonnement que précédemment.
L'initialisation est évidente. De plus si $u_n \leq l_2 \Longrightarrow \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+l_2} \Longrightarrow u_{n+1} \leq l_2$. L'hérédité aussi.
Nous avons donc bien confirmation que (u_n) étant croissante et majorée converge et que $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Exercice 3	Etudions la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \ln x$ il est facile de remarquer que l'intervalle $I = [1;\ +\infty[$ est stable par f.
$u_0 \in I$ donc la suite est parfaitement définie et à valeurs dans I.

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \ln(u_n) - (1 + \ln(u_{n-1})) = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$$

Donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$. (La fonction $\ln$ étant strictement croissante)
Sachant que $u_1 - u_0 = 1 + \ln(u_0) - 2 = \ln(2) - 1$ et que $\ln(2) - 1 < 0$ il est aisé de démontrer par récurrence que $\forall n, u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
Elle est minorée par 1 donc convergente. Sa limite l vérifie $l = 1 + \ln(l)$. En effet f est continue sur I.
Etudions la fonction φ définie sur $[1;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln x - x + 1$. $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1$ et donc $\varphi'(x) \leq 0$ pour $x \geq 1$. φ est montone et strictement décroissante sur $[1;\ +\infty[$. $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = x(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x})$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$. Donc d'après le TVI, φ ne s'annulle qu'en 1. Il vient $\boldsymbol{l = 1}$

Exercice 4	Soit $f : x \to \frac{(x^3+1)}{3}$ et (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ a. Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet trois racines réelles que l'on exprimera pas. b. Etudier le signe de $f(x) - x$ ainsi que la monotonie de f c. Préciser le comportement de (u_n) suivant la valeur de u_0

a. $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{(x^3+1)}{3} = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$. Soit P le polynôme définie par $P(x) = x^3 - 3x + 1$

$$P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

P est donc croissant sur $]-\infty; -1]$, décroissant sur $[-1; 1]$ et croissant sur $[1; +\infty]$
$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$; $P(-1) = -1 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3; P(1) = 1^3 - 3 * 1 + 1 = -1$; $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$;
On a donc $\lim_{x\to-\infty} P(x) < 0$; $P(-1) > 0$; $P(1) < 0$; $\lim_{x\to+\infty} P(x) > 0$;
La ocntinuité de P, un tableau de variation et le TVI nous donnent l'existence de trois racines α, β, γ telles que $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$ avec $\alpha \in]-\infty\,; -1[$, $\beta \in]-1\,; 1[$, $\gamma \in]1\,; +\infty[$,
Ce sont donc aussi les trois racines de l'équation $f(x) = x$.

b. Les racines de P sont aussi les racines de $f(x) - x$. Nous pouvons donc déduire le tableau de signes suivant pour $f(x) - x$:

x		α		β		γ	
$f(x)-x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

De plus $f'(x) = x^2 \Longrightarrow f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$

c. Si $u_0 < \alpha$. Alors $f(u_0) - u_0 < 0 \Rightarrow u_1 < u_0 < \alpha$. En composant par f qui est une fonction croissante il vient par récurrence $\forall n, u_{n+1} < u_n$
Le suite est donc décroissante. Si elle était convergente elle devrait converger vers α, β ou γ. Or $\forall n, u_n \leq u_0 < \alpha$. Cela est donc impossible. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
Si $u_0 = \alpha$. Alors $f(u_0) - u_0 = 0$. En composant par f à droite et à gauche il vient par récurrence $\forall n, u_{n+1} = u_n$
La suite est donc constante.

Si $\alpha < u_0 < \beta$ Alors $f(u_0) - u_0 > 0 \Rightarrow u_1 > u_0 > \alpha$. En composant par f qui est une fonction croissante il vient par récurrence $\forall n, u_{n+1} > u_n > \alpha$
Le suite est donc croissante. Il est aisé de démontrer aussi par récurence que $\forall n\ u_n \leq \beta$. La suite est donc croissante et majorée. Elle est convergente. Sa limite vérifie $f(x) = x$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \beta$

Si $u_0 = \beta$. Alors $f(u_0) - u_0 = 0$. En composant par f à droite et à gauche il vient par récurrence $\forall n, u_{n+1} = u_n$
La suite est donc constante.

Si $\beta < u_0 < \gamma$ Alors $f(u_0) - u_0 < 0 \Rightarrow u_1 < u_0 < \gamma$. En composant par f à droite et à gauche qui est une fonction croissante il vient par récurrence : $\forall n, u_{n+1} < u_n < \gamma$. Le suite est donc décroissante. Il est aisé de démontrer aussi par récurence que $\forall n\ u_n \geq \beta$. La suite est donc croissante et minorée. Elle est convergente. Sa limite vérifie $f(x) = x$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \beta$

Si $\gamma < u_0$ Alors $f(u_0) - u_0 > 0 \Rightarrow u_1 > u_0 > \gamma$. En composant par f à droite et à gauche qui est une fonction croissante il vient par récurrence : $\forall n, u_{n+1} > u_n > \gamma$. Le suite est donc croissante. Il est aisé de démontrer aussi par récurence que $\forall n\ u_n \geq \gamma$. La suite est croissante. Si elle était convergente elle devrait converger vers α, β ou γ.
Or $\forall n, u_n \geq u_0 > \gamma$. Cela est donc impossible. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 5	Soient (u_n) et (v_n) les suites récurrentes réelles définies par : $(u_0, v_0) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergente vers une même limite l

Par une récurrence immédiate nous montrons aisément que $\forall n\ (u_n, v_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$

$(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} \Longrightarrow u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} \geq 0 \Longrightarrow \frac{u_n+v_n}{2} \geq \sqrt{u_n v_n}$

Nous avons donc $\forall n \geq 0\ \ v_{n+1} \geq u_{n+1}$. Donc $\forall n \geq 1\ \ v_n \geq u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - \left(\sqrt{u_n}\right)^2 = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$$

$v_n \geq u_n \Longrightarrow \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geq 0 \Longrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{(u_n)}$ **croissante**

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

$v_n \geq u_n \Longrightarrow \boldsymbol{(v_n)}$ **décroissante**

(u_n) croissante, $u_n \leq v_n$et (v_n) décroissante donc (u_n) majorée par v_0. Comme (u_n) est croissante alors (u_n) converge vers une limite l.

(v_n) décroissante, $u_n \leq v_n$et (v_n) décroissante donc (v_n) majorée par u_0. Comme (v_n) est décroissante alors (v_n) converge vers une limite l'.

En passant à la limite les expressions $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

Il vient $l = \sqrt{ll'}$ et $l' = \frac{l+l'}{2}$ donc $l = l'$

Exercice 6	Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ a. Etudier la convergence de la suite (u_n) b. On pose pour tout n, $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis v_n en fonction de v_0 et de n c. Montrer que si $u_0 > \sqrt{a}$ on a $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq 2u_0 {v_0}^{2^n}$. Que peut en déduire ?

a. $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.
Nous pouvons déjà consater que si $x > 0$, $f(x) > 0$ donc $\forall n, u_n$ est bien définie.

Nous pouvons aussi remarquer que $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{u_n} - \sqrt{\frac{a}{u_n}})^2 + 2\sqrt{a}\right] = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{\frac{a}{u_n}})^2 + \sqrt{a}$

Donc $\forall n \geq 1\ u_{n+1} \geq \sqrt{a}$. La suite est donc minorée par $\sqrt{a}$ pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n} - 2u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a - {u_n}^2}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sqrt{a} - u_n\right)\left(\sqrt{a} + u_n\right)}{u_n}\right] = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{a} + u_n}{u_n}(\sqrt{a} - u_n)$$

$\frac{\sqrt{a}+u_n}{u_n} = 1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}$. Or $u_n \geq \sqrt{a} \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ Donc $\frac{\sqrt{a}+u_n}{u_n} \leq 2$. Il vient $u_{n+1} - u_n \leq \sqrt{a} - u_n \leq 0$

Donc (u_n) est décroissante. (u_n) étant décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, nous en déduisons sa convergence vers un réel l. Pour des raisons de continuité, ce réel l vérifie $l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Leftrightarrow \frac{l}{2} = \frac{a}{2l} \Longrightarrow l = \sqrt{a}$

La suite (u_n) converge donc vers $\sqrt{a}$

b. $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} \Longrightarrow v_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}\right)}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}\right)} = \frac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{\frac{a}{u_n}}\right)^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{\frac{a}{u_n}}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{u_n}\right)^2\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{\frac{a}{u_n}}\right)^2}{\left(\sqrt{u_n}\right)^2\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{\frac{a}{u_n}}\right)^2} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = {v_n}^2$

${v_0}^2$

Chaque terme est le carré du précédent. Il vient $v_n = (v_0)^{2^n}$

c. Si $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ alors $\left|u_n - \sqrt{a}\right| = |v_n|\left|u_n + \sqrt{a}\right| \Longrightarrow \left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq (v_0)^{2^n}\left|u_n + \sqrt{a}\right| \leq (v_0)^{2^n} * 2u_0$

Nous avons donc une approximation aussi petite que désirée de la valeur $\sqrt{a}$ grâce à la suite (u_n)