Extension de la dérivée

Théorème

Soit I un intervalle. Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$
On suppose que f' admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a.
Alors :

- Si $l \in \mathbb{R}$, f est dérivable en $l. f'(a) = l$ et f' est continue en a
- Si $l \in \{+\infty; -\infty\}$ Alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

Preuve

Soit $x \in I$ $(x \neq a)$. f étant continue sur $[a; x]$ et dérivable sur $]a; x[$ le théorème des accroissements finis nous dit que :
$\exists c_x \in]a; x[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a) \Longrightarrow f'(c_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Lorsque x tend vers a, c_x tend aussi vers a. f' admettant une limite l en a nous avons donc :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} f'(c_x) = l$$

Dans le cas particulier où $l \in \mathbb{R}$.
Cela nous renseigne sur le fait que f est dérivable en a. $f'(a) = l$ et surtout $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$ ce qui nous amène f' continue en a.

Exemple

Soit $f : \left\{\begin{matrix} 0 \to 0 \\ x \to x^4 sin\left(\frac{1}{x}\right)\ pour\ x \neq 0 \end{matrix}\right\}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet $\forall x \neq 0, -1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Longrightarrow -x^4 \leq x^4 sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^4 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x^4 sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
En effet $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$
f est bien sur dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \neq 0, f'(x) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^2}\right) x^4 sin\left(\frac{1}{x}\right) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour les mêmes raisons $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.
Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et en particulier en 0) et f' continue en 0