

Continuité de fonction. TVI

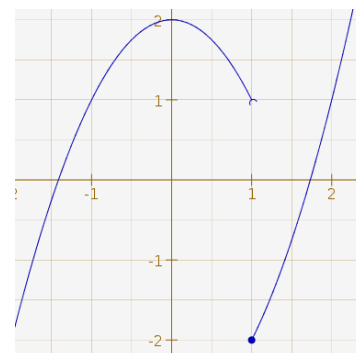
Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in E$

Définition On dit qu'une fonction f est continue lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont la courbe est représentée ci-bas.

Exemple

Cette fonction n'est pas continue en 1. En effet $f(1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1)$.
Par contre elle est continue en 0.
En effet $f(0) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$



Remarque Une fonction continue est une fonction dont la courbe peut se tracer avec un stylo sans lever le stylo.

Définition On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout point de I .

Notation On note $C(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$

Théorèmes

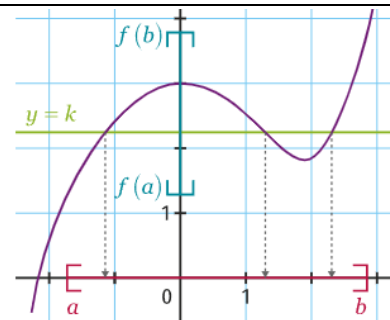
- Soient f et g deux fonctions de $C(E, \mathbb{R})$ et soient λ et μ deux réels. Alors les fonctions $h: x \rightarrow f(x)g(x)$, $x \rightarrow \lambda f(x) + \mu g(x)$ et $x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ (lorsque g ne s'annule pas) appartiennent aussi à $C(E, \mathbb{R})$
- Soit f une fonction de $C(E, F)$ et g une fonction de $C(F, \mathbb{R})$. Alors la fonction $x \rightarrow g \circ f(x)$ appartient à $C(E, \mathbb{R})$.
- Soient I et J deux intervalles. Pour toute fonction f bijective appartenant à $C(I, J)$ la réciproque f^{-1} est continue sur J .

Preuve

La grande majorité des théorèmes présentés dans ce chapitre consacré à de la révision sera revu dans le chapitre continuité propre au programme MPSI. Ils y seront alors rigoureusement démontrés et nous n'avons pas voulu ici doubler les preuves.

Théorème

C'est le théorème dit des valeurs intermédiaires ou TVI.
Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$
Soit k un réel compris (au sens large) entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un réel k dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(d) = k$



Remarque

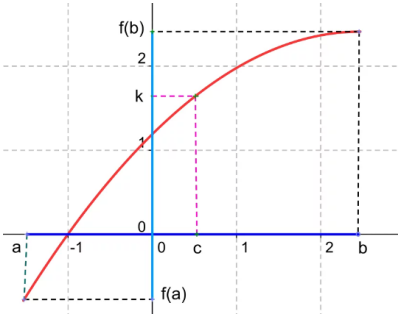
- Ce théorème garantit l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$. Il ne garantit pas l'unicité de la solution. Sur la figure ci-dessus nous constatons par exemple qu'il existe trois solutions à l'équation $f(x) = k$
- Attention dans le cas général nous n'avons pas $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
Exemple : prenons dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$; Nous avons $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f(3) = \frac{1}{3}$; $f(3) < f(2)$
Donc $f([2; 3]) = [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}] = [f(3); f(2)]$

Exemple

Considérons la fonction $f: \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{1}{2+x^4} \end{array} \right\}$

$f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{3}$; $0,4 \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ donc l'équation $f(x) = 0,4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$

Lorsque la fonction est strictement monotone, l'unicité de la solution est alors assurée.
C'est l'objet du TVI appliqué aux fonctions strictement monotones.

Théorème	Soit f une fonction continue strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$. Alors f établit une bijection de $[a; b]$ vers $[f(a); f(b)]$	
Remarque	Ce théorème peut aussi s'énoncer ainsi. Soit f une fonction continue strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$. Soit $d \in [f(a); f(b)]$ alors il existe un seul réel c dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(c) = d$. Avec une écriture mathématique plus concise cela donne : $\exists! c \in [a; b] \text{ tq } f(c) = d$ (le signe ! signifie un seul)	
Exemple	Soit $f: \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow e^x \end{matrix} \right\}$. f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$. $f(0) = 1$; $f(1) = e \approx 1,72$ $\frac{3}{2} \in [f(0); f(1)]$ donc $\exists! c \in [0; 1] \text{ tq } f(c) = \frac{3}{2}$	
Théorème	Bien entendu ce théorème se décline aussi avec les fonctions décroissantes. Soit f une fonction continue strictement décroissante sur un intervalle $[a; b]$. Alors f établit une bijection de $[a; b]$ vers $[f(b); f(a)]$	
Exemple	Soit $f: \left\{ \begin{matrix} [1; 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{1}{x^3} \end{matrix} \right\}$; f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 2]$ $f(1) = 1$; $f(2) = \frac{1}{8} = 0,125$; $\frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{8} ; 1 \right]$ Donc $\exists! c \in [1; 2] \text{ tq } f(c) = \frac{1}{2}$	
Remarque	Remarque ce théorème se décline aussi dans le cas où f n'est pas définie sur un intervalle fermé.	
Théorème	• Soit f continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b[$. Alors f établit une bijection de $[a; b[$ vers $[f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$ • Soit f continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b[$. Alors f établit une bijection de $[a; b[$ vers $] \lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a)]$ • Soit f continue et strictement croissante sur l'intervalle $]a; b]$. Alors f établit une bijection de $]a; b]$ vers $] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$ • Soit f continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]a; b]$. Alors f établit une bijection de $]a; b]$ vers $] \lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x) [$	
Exemple	La fonction $x \rightarrow e^{-x}$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ Donc elle établit une bijection de $[0; +\infty[$ vers $]0; 1]$. Cela signifie par exemple que $\exists! c \in]0; +\infty[$ tel que $e^{-c} = \frac{1}{2}$	