Convexité

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I

Propriété

Soient x et y deux réels avec $x < y$. Soit λ un réel compris entre 0 et 1. Lorsque λ décrit $[0;1]$ alors le réel $(1-\lambda)x + \lambda y$ décrit toutes les valeurs de l'intervalle $[x;y]$

Preuve

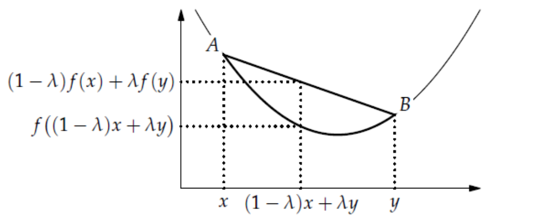
L'écart entre x et y est le réel $y - x$. En construisant le réel $x + \lambda(y - x)$ avec $\lambda \in [0;1]$ on construit donc un réel compris entre x et y. Si $\lambda = 0$ on est sur x et si $\lambda = 1$ on est y. Dans le cas où $0 < \lambda < 1$ on est entre x et y. Or $x + \lambda(y - x) = x + \lambda y - \lambda x = x(1-\lambda) + \lambda y$. Le réel $(1-\lambda)x + \lambda y$ décrit donc toutes les valeurs entre x et y.

Définition

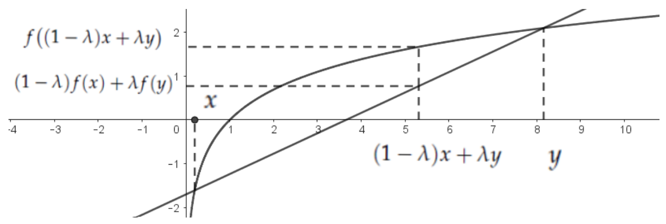
Soit I un intervalle et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est convexe sur l'intervalle I si f est située en dessous de ses cordes. C'est-à-dire $\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0;1]\ f(\,(1-\lambda)x + \lambda y\,) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$
- On dit que f est concave sur l'intervalle I si f est située au-dessus de ses cordes. C'est-à-dire $\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0;1]\ f(\,(1-\lambda)x + \lambda y\,) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

Illustration



Fonction Convexe



Fonction Concave

Remarque

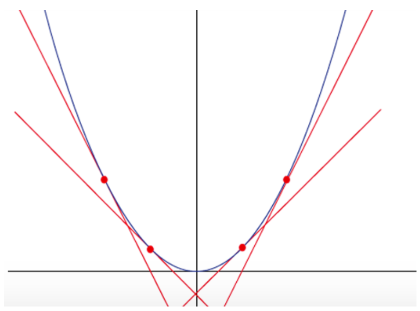
Il est équivalent de dire que f est une fonction est concave ou que $-f$ est une fonction convexe.

Théorème

Soit I un intervalle et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I
2. f' est croissante sur I ou bien $f'' \geq 0$ si f est deux fois dérivable sur I
3. Le graphe de f est situé au-dessus de ses tangentes.

Illustration



f est convexe donc au-dessus de ses tangentes.

Preuve

Montrons $2 \to 1$

Soient x et y deux réels avec $y > x$. Considérons φ la fonction définie par
$\varphi(\lambda) = f(\,(1-\lambda)x + \lambda y\,) - (1-\lambda)f(x) - \lambda f(y)$
$\varphi(\lambda) = f(\,x + \lambda(y-x)\,) - (1-\lambda)f(x) - \lambda f(y)$
$\varphi'(\lambda) = (y-x)\,f'(\,x + \lambda(y-x)\,) + f(x) - f(y)$
$y - x > 0$ donc f' croissante implique φ' croissante.
Remarquons que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$
Supposons $\varphi'(1) < 0$. φ' étant croissante cela impliquerait $\forall t \in [0;1]\ \ \varphi'(t) < 0$
Or $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(u)du$. L'intégrale d'une fonction négative étant négative nous avons : $\varphi(1) < \varphi(0)$. Ce qui est impossible puisque $\varphi(0) = \varphi(1)$. Donc $\varphi'(1) \geq 0$. Pour les mêmes raisons nous ne pouvons avoir $\varphi'(0) > 0$. Donc $\varphi'(0) \leq 0$. φ' est croissante et part d'une valeur négative pour aller vers une valeur positive. Nous en déduisons d'après le théorème des valeurs intermédiaires que φ' est négative sur un intervalle $[0;c]$ (avec $c \in [0;1]$) puis positive sur un intervalle $[c;1]$. Rappelons que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Nous en déduisons avec un tableau de variations que φ est négative sur $[0\,;1]$
Donc $f(\,(1-\lambda)x + \lambda y\,) \leq (1-\lambda)f(x) - \lambda f(y)$. Donc f convexe

Montrons $1 \rightarrow 2$

Pour cela nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme1 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in I$ Alors g_a la fonction définie par $\left\{\begin{matrix} I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{matrix}\right\}$ est une fonction croissante.

Autrement dit sur le schéma ci-contre $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \leq \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$ pour

$$x_1 \leq x_2$$

Pour démontrer cette propriété il suffit de remarquer que x_1 étant entre a et x_2 il peut s'écrire comme $\lambda a + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda \in [0;1]$

f étant convexe nous avons $f(\lambda a + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(x_2)$

$$f(x_1) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$f(x_1) - f(a) \leq f(a)(\lambda - 1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$f(x_1) - f(a) \leq (1-\lambda)\big(f(x_2) - f(a)\big)$$

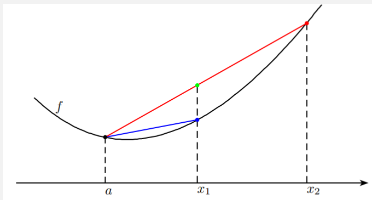
Remarquons ensuite que $\frac{x_1-a}{x_2-a} = \frac{\lambda a+(1-\lambda)x_2-a}{x_2-a} = \frac{(1-\lambda)(x_2-a)}{x_2-a} = 1 - \lambda$

Il vient :

$f(x_1) - f(a) \leq \frac{x_1-a}{x_2-a}\big(f(x_2) - f(a)\big)$ soit$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \leq \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$

Donc $g_a(x_1) \leq g_a(x_2)$ ce qui indique que g_a est croissante.

Type equation here.



Lemme2 : Soient a, x, y et b quatre réels rangés dans un ordre strictement croissant. f convexe implique $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$

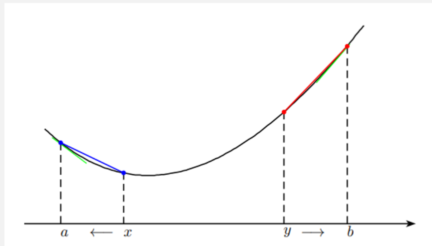
Nous avons vu d'après le lemme1 que g_x est croissante.

$a < y$ donc $g_x(a) \leq g_x(y)$

g_y est croissante donc $g_y(x) \leq g_y(b)$

Remarquons que $g_x(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = g_y(x)$

Il vient $g_x(a) \leq g_x(y) = g_y(x) \leq g_y(b)$



Revenons à la démonstration principale (si f convexe alors f' croissante)

Nous avons pour $a < x < y < b$ $\quad g_x(a) \leq \; g_y(b) \quad (*)$

Remarquons que $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} g_x(a)$

De même $f'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f(y)-f(b)}{y-b} = \lim\limits_{y \to b} g_y(b)$

En faisant donc tendre x vers a et y vers b dans $(*)$ il vient $f'(a) \leq f'(b),$ nous avons donc montré que f' est croissante.

Montrons $2 \rightarrow 3$

Il s'agit de montrer que si f' est croissante, alors la courbe de f est au-dessus de ses tangentes.

La tangente au point $x = a$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Construisons la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)] = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$

$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$. f' étant croissante φ' sera négative pour $x \leq a$ et positive sinon.

φ sera donc décroissante lorsque $x \leq a$ et croissante sinon. (dresser un tableau de variations pour plus de lisibilité)

φ admet donc un minimum en $x = a$. Ce minimum vaut $\varphi(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$

Donc φ est positive au voisinage de a ce qui signifie $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ soit f est au-dessus de sa tangente.

Montrons $3 \rightarrow 2$

Il s'agit de montrer que si f est au-dessus de ses tangentes alors f convexe.

Prenons deux réels a et b avec $a < b$.

L'équation de la tangente au point a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

f est au-dessus de ses tangentes sur un intervalle I donc $\forall x \in I \; f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

Pour $x \geq a \; f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}$

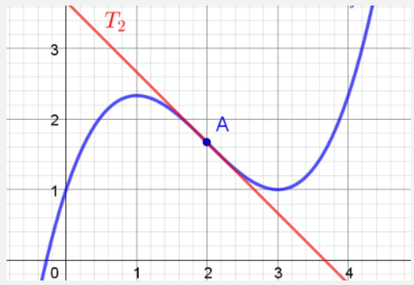
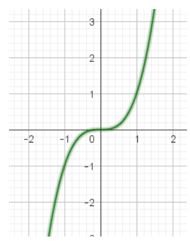
L'équation de la tangente au point b a pour équation $y = f'(b)(x-b) + f(b)$

f est au-dessus de ses tangentes sur un intervalle I donc $\forall x \in I \; f(x) \geq f'(b)(x-b) + f(b)$

Pour $x \leq b \; f'(b) \geq \frac{f(x)-f(b)}{(x-b)}$

Le lemme1 précédent nous indique que $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \leq \frac{f(x)-f(b)}{(x-b)}$. Il vient $f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \leq \frac{f(x)-f(b)}{(x-b)} \leq f'(b)$

<table>
<tr><td colspan="3">Nous avons donc montré que f' est croissante.

Nous avons donc montré $\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{2} \Leftrightarrow \mathbf{3}$</td></tr>
<tr><td>Exemples</td><td colspan="2">Ces équivalences permettent de trouver beaucoup d'inégalités.
• Prenons la fonction ln définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} (ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$. La dérivée seconde étant négative, nous en déduisons que la fonction est concave. Donc
$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \ \forall \lambda \in [0;1] \ ln((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)\ln(x) + \lambda \ln y$
Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*} \ ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x)}{2} + \frac{\ln(y)}{2} \geq \ln(\sqrt{xy})$
• Prenons la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} (exp)''(x) = -\exp(x)$. La dérivée seconde étant positive, nous en déduisons que la fonction est convexe.
Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \ \forall \lambda \in [0;1] \ e^{((1-\lambda)x + \lambda y)} \leq (1-\lambda)e^x + \lambda e^y$
Posons p et q tels que $\frac{1}{p} = \lambda$ et $\frac{1}{q} = (1-\lambda)$
Il vient $e^{\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)} \leq \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q}$. Posons $x = lna$ et $y = lnb$. Il vient $e^{\left(\frac{lna}{p}+\frac{lnb}{q}\right)} \leq \frac{e^{lna}}{p} + \frac{e^{lnb}}{q}$
Soit $e^{\left(\frac{lna}{p}\right)} e^{\left(\frac{lnb}{q}\right)} \leq \frac{e^{lna}}{p} + \frac{e^{lnb}}{q} \Leftrightarrow e^{\left(lna^{\frac{1}{p}}\right)} e^{\left(lnb^{\frac{1}{q}}\right)} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \Leftrightarrow \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$
• Reprenons la fonction ln. Cette fonction étant concave la fonction est en dessous de ses tangentes. La tangente au point a est donnée par l'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
Il vient $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ lnx \leq \frac{1}{a}(x-a) + \ln(a)$</td></tr>
<tr><td>Définition. Théorème</td><td>Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$ mais n'est pas une borne de I. On dit que a est un point d'inflexion de f s'il existe un réel r et un réel s tels que f convexe sur $[r, a]$ et f concave sur $[a, s]$ (ou le contraire)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Remarques</td><td colspan="2">• Si f est deux fois dérivable alors il revient au même de dire que la fonction f'' s'annule en changeant de signe en a.
• Sur la zone de concavité la courbe est au-dessus de ses tangentes. Sur la zone de convexité la courbe est au-dessous de ses tangentes. En $x = a$ la tangente traverse la courbe. (voire courbe ci-dessus)</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>L'exemple le plus classique est la fonction $f: x \to x^3$. $f'(x) = 3x^2$. $f''(x) = 6x$
La dérivée seconde est donc négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. Elle s'annule en changeant de signe en $x = 0$. 0 est donc bien un point d'inflexion de la fonction.</td><td></td></tr>
</table>