

Dérivabilité

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in E$

Définition	On dit qu'une fonction f est dérivable en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut un réel l . Ce réel est noté nombre dérivé de f en a et s'écrit $f'(a)$.	
Remarque	Il est équivalent de calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	
Exemple	Soit $f: \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right\}$. Cette fonction est dérivable en $x = 3$ car $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+h^2+6h-9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6.$ On note $f'(3) = 6$	
Théorème	Dans le cas où f est dérivable en a on appelle tangente de la courbe en $x = a$ la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$	
Explication	<p>$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la corde reliant le point $A(a, f(a))$ et le point $B(a+h, f(a+h))$</p> <p>Lorsque h se rapproche de 0, c'est-à-dire lorsque le point $B(a+h, f(a+h))$ se rapproche de $A(a, f(a))$ cette corde devient la tangente à la courbe passant par le point A.</p>	
Théorème	Dérivabilité implique continuité. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in E$. Alors f est continue en a	
Preuve		
$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) ; \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0 ; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$		
Remarque	<p>La réciproque est fautive. Considérons la fonction valeur absolue.</p> <p>Cette fonction est continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ Pour autant cette fonction n'est pas dérivable en 0.</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$ <p>Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$</p>	
Définition	On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I lorsque cette fonction est dérivable en tout point de I . On appelle sa dérivée f'	
Définition	<p>Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Lorsque f' est dérivable on appelle sa dérivée f''.</p> <p>Lorsque f'' est dérivable on appelle sa dérivée $f^{(3)}$</p> <p>Lorsque $f^{(3)}$ est dérivable on appelle sa dérivée $f^{(4)}$</p> <p>.....</p> <p>Lorsque $f^{(k)}$ est dérivable on appelle sa dérivée $f^{(k+1)}$</p>	