

Fonction exponentielle

Définition

La fonction exponentielle notée $\exp$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y' = y$ et $y(0) = 1$. Nous admettons l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

Propriété

Soient a et b dans $\mathbb{R}$, $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$

Preuve

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \exp(a + x) - \exp(x) \exp(a)$
 $\varphi'(x) = \exp'(a + x) - \exp'(x) \exp(a) = \varphi(x)$ et $\varphi(0) = \exp(a) - \exp(0) \exp(a) = 0$ donc φ est aussi solution de l'équation $y' = y$ et vérifie $y(0) = 0$.

Considérons maintenant la fonction $f: x \rightarrow \exp(x) - \varphi(x)$. $f'(x) = f(x)$. $f(0) = \exp(0) - \varphi(0) = 1$

f vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ donc vue l'existence et l'unicité d'une telle fonction nous avons

$$f(x) = \exp(x) \Rightarrow \exp(x) - \varphi(x) = \exp(x) \Rightarrow \varphi(x) = 0$$

Nous avons donc quelque soit x dans $\mathbb{R}$, $\exp(a + x) = \exp(x) \exp(a)$

Propriété

La fonction $\exp$ ne s'annule jamais.

Preuve

Supposons qu'il existe a réel tel que $\exp(a) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x + a) = \exp(a) \exp(x) = 0$

$\exp(x) = \exp(x + a - a) = \exp(x + a) \exp(-a) = 0$ cela signifierait que la fonction $\exp$ est la fonction nulle ce qui pose un problème car $\exp(0) = 1$. Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

Propriété

La fonction $\exp$ est strictement positive.

Preuve

La fonction $\exp$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $\exp$ ne s'annule jamais et vérifie $\exp(0) = 1$. Pour des raisons de continuité nous avons donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$

Propriété

$$\exp(a - a) = \exp(a) \exp(-a) \rightarrow 1 = \exp(a) \exp(-a) \rightarrow \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

Propriété

La fonction exponentielle est infiniment dérivable et est convexe.

Preuve

La fonction exponentielle est dérivable et vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$. Une récurrence immédiate nous donne l'infinie dérivabilité. $\exp''(x) = \exp(x)$ donc $\exp''(x) > 0$. La fonction est donc convexe.

Propriété

La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve

La dérivée de la fonction $\exp$ est la fonction $\exp$ qui est strictement positive. Donc la fonction est strictement croissante.

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

Preuve

La fonction est convexe, donc au dessus de ses tangentes. La tangente au point $x = 0$ a pour équation

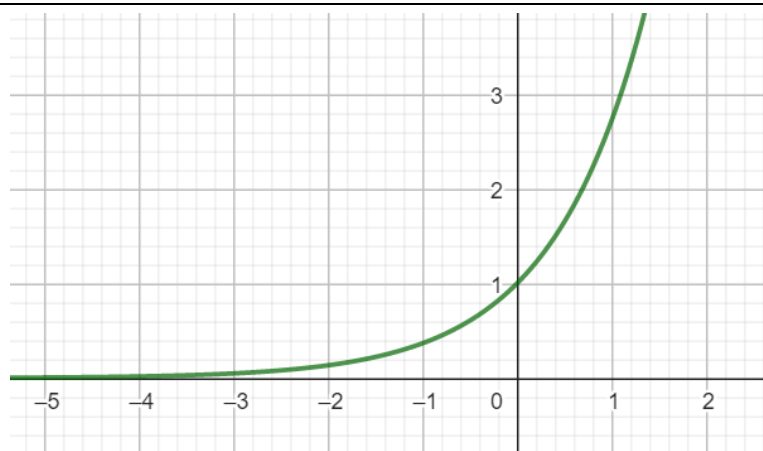
$y = \exp'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = x + 1$. Il vient $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) \geq x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

Exemple

Courbe représentative



Propriété

Soit n un entier naturel. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$

Preuve

Lemme : Montrons que $\exp\left(\frac{p}{q}x\right) = [\exp(x)]^{\frac{p}{q}}$ pour p, q entiers naturels.

De la propriété $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ il vient $\exp(x+x) = [\exp(x)]^2$. Par une récurrence évidente $\exp(px) = [\exp(x)]^p$ (*)

$$\exp(x) = [\exp(x)]^{q \cdot \frac{1}{q}} = ([\exp(x)]^q)^{\frac{1}{q}} = [\exp(qx)]^{\frac{1}{q}}$$

Posons $X = qx$ Il vient $\exp\left(\frac{X}{q}\right) = [\exp(X)]^{\frac{1}{q}}$ (**)

En combinant (*) et (**) il vient $\exp\left(\frac{p}{q}x\right) = [\exp(x)]^{\frac{p}{q}}$. Le lemme est démontré.

Considérons la fonction φ définie par $\varphi(x) = \exp(x) - x$

$\varphi'(x) = \exp(x) - 1$. La fonction $\exp$ étant croissante nous avons $\forall x > 0 \exp(x) > \exp(0) \Rightarrow \exp(x) > 1$

Donc φ' strictement positive donc φ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Il vient $\forall x > 0 \varphi(x) > \varphi(0) \rightarrow \exp(x) - x > 0 \Leftrightarrow \exp(x) > x$

Posons $X = \frac{x}{2}$ avec $x > 0$ nous avons $\exp(X) > X \Rightarrow \exp\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{x}{2} \Rightarrow [\exp(x)]^{\frac{1}{2}} > \frac{x}{2} \Rightarrow \exp(x) > \frac{x^2}{4}$

Donc $\frac{\exp(x)}{x} > \frac{x}{4}$ ce qui implique $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

$$\frac{\exp(x)}{x^n} = \left[\frac{(\exp(x))^{\frac{1}{n}}}{x} \right]^n = \left[\frac{(\exp(\frac{x}{n}))}{x} \right]^n = \left[\frac{(\exp(\frac{x}{n}))}{\frac{x}{n}} \right]^n * \left(\frac{1}{n} \right)^n = \left[\frac{(\exp(X))}{X} \right]^n * \left(\frac{1}{n} \right)^n \text{ en posant } X = \frac{x}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[\frac{\exp(X)}{X} \right]^n = +\infty$$

Propriété	$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1 \Rightarrow \exp(x) \approx x + 1 \text{ lorsque } x \text{ proche de } 0$
Preuve	
La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en 0. La définition de la dérivabilité en 0 nous donne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = 1$ soit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} \Rightarrow \exp(x) \approx x + 1 \text{ lorsque } x \text{ proche de } 0$	