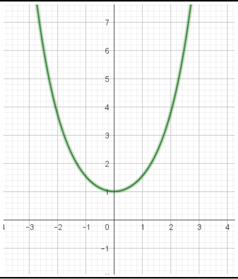
Fonctions hyperboliques

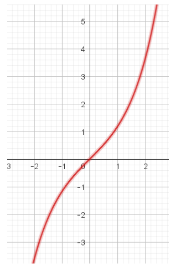
Définition

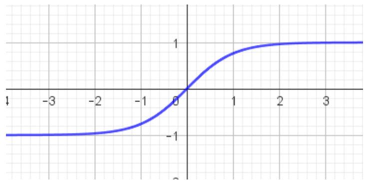
Nous définirons ici trois fonctions : le cosinus hyperbolique noté $cosh$, le sinus hyperbolique noté $\sinh$ et la tangente hyperbolique notée $tanh$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\forall x \in \mathbb{R}, \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

Courbes







Remarques

- Nous pouvons remarquer que la fonction $cosh$ est positive sur $\mathbb{R}$
- Nous pouvons remarquer que la fonction $sinh$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$
  ($\forall x \in \mathbb{R}^+\ e^{-x} < 1$ et $e^x > 1$ donc $sinh\ (x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^-\ e^{-x} > 1$ et $e^x < 1$ donc $sinh\ (x) < 0$)
- Nous pouvons en déduire que la fonction $tanh = \frac{sinh}{cosh}$ est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$
- Nous pouvons remarquer immédiatement que la fonction $tanh$ bien que définie comme un quotient est définie sur $\mathbb{R}$. En effet la fonction $cosh$ ne s'annule jamais.

Propriétés

$$\forall x \in \mathbb{R}\ cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$$

Preuve

$$cosh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}\ ;\ sinh^2(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}\ ;$$

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1$$

Propriétés

Les fonctions $cosh$, $sinh$ et $tanh$ sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ comme quotient et somme de fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

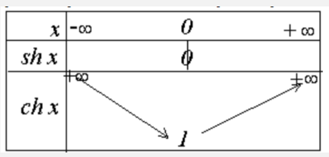
$\forall x \in \mathbb{R}\ cosh'(x) = sinh\ (x)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ sinh'(x) = cosh\ (x)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ tanh'(x) = 1 - tanh^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}$

Preuve

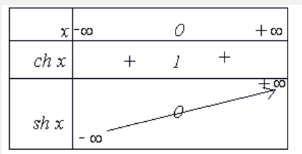
- $cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sinh\ (x)$
- $sinh'\ \ (x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = cosh(x)$
- $tanh'(x) = \frac{sinh'(x) * cosh(x) - cosh'(x) * sinh\ (x)}{(cosh\ x)^2} = \frac{cosh^2(x) - sinh^2\ (x)}{(cosh\ x)^2} = 1 - tanh^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}$

Propriétés

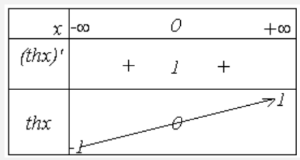
Les tableaux de variation des fonctions $cosh, sinh$ et $tanh$ sont respectivement



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh\ x$		0	
$ch\ x$	$+\infty$	1	$+\infty$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch\ x$	$+$	1	$+$
$sh\ x$	$-\infty$	0	$+\infty$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(thx)'$	$+$	1	$+$
thx	-1	0	1

Preuve

Le signe de la dérivée nous donne le sens de variation. $\mathrm{Lim}_{x \to +\infty}\ e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, Nous en déduisons d'après les définitions de $cosh$ et $sinh$ les limites en $\pm\infty$

$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$

De même $\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$

Propriétés

La fonction $cosh$ est paire, la fonction $sinh$ est impaire et la fonction $tanh$ est impaire.

Preuve

Un retour à la définition de ces trois fonctions nous montre aisément que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ cosh\ \ (-x) = cosh\ (x), \forall x \in \mathbb{R}\ sinh\ \ (-x) = -sinh\ (x), \forall x \in \mathbb{R}\ tanh\ \ (-x) = -tanh\ (x)$$

Propriétés

La fonction $cosh$ est convexe, la fonction $sinh$ convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave $\mathbb{R}^-$ et la fonction $tanh$ est convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$.

Preuve

- $cosh''(x) = cosh(x)$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ cosh''(x) \geq 0$ la fonction $cosh$ est donc convexe
- $sinh''(x) = sinh(x)$ la fonction $sinh$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave sur $\mathbb{R}^-$ avec un point d'inflexion en 0.
- $tanh''(x) = -2\frac{\cosh\ (x)}{sinh^3(x)}$ la fonction $tanh$ est donc convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$