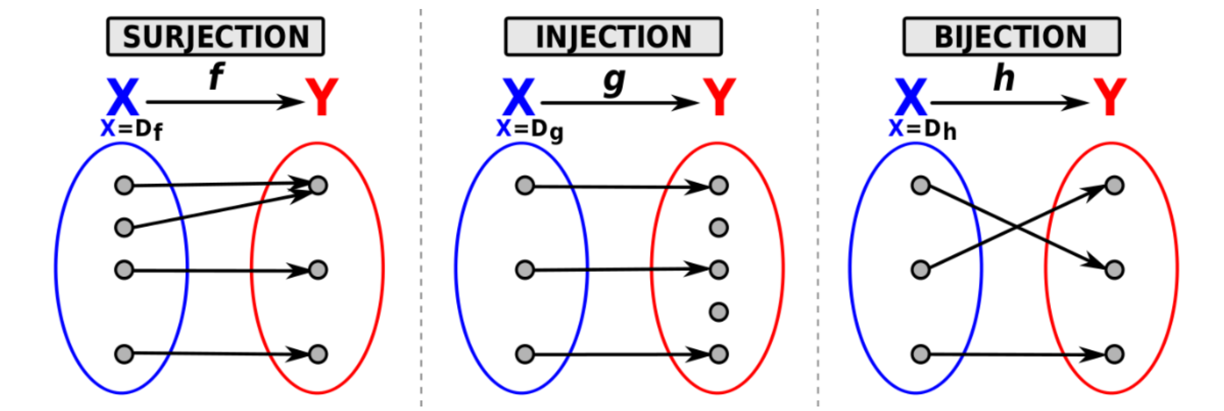
Injections, Surjections, Bijections	
Définition	Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. • On dit que f est injective lorsque tout élement de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent dans l'ensemble de départ • On dit que f est injective lorsque tout élement de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent dans l'ensemble de départ • On dit que f est bijective lorsque f est injective et surjective. On dit aussi que f est bijective lorsque tout élement de l'ensemble d'arrivée admet un antécédent et un seul dans l'ensemble de départ
Exemple	
Remarque	Pour démontrer qu'une fonction est injective il est équivalent de démontrer que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ Cette méthode est généralement plus aisée que de démontrer que tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent.
Exemples	Démontrons que la fonction $\ln : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ x \to \ln x \end{cases}$ est injective. $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+}, \ln x = \ln y \Rightarrow \ln x - \ln y = 0 \Rightarrow \ln \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$ et le tour est joué.
	La fonction $f : \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{Bmatrix}$ n'est pas injective. En effet $f(1) = f(-1) = 1$ Elle n'est d'ailleurs pas surjective non plus : le nombre -1 qui appartient à l'ensemble d'arrivée n'admet pas d'antécédent.
	La fonction $g : \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 3x - 1 \end{Bmatrix}$ est une bijection. En effet à chaque élément de l'ensemble d'arrivée y correspond un et un seul x de l'ensemble de départ tel que $g(x) = y$ Prenons par exemple $3 \in \mathbb{R}$ comme élément de l'ensemble d'arrivée. $$g(x) = 3 \Leftrightarrow 3x - 1 = 3 \Leftrightarrow 3x = 3 + 1 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$ 3 admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ. Ce nombre est $\frac{4}{3}$

<table>
<tr><th colspan="4">Composition d'applications</th></tr>
<tr><td>Proposition</td><td colspan="3">La composée de deux injections (respectivement surjections, bijections) est une injection (respectivement surjection, bijection)</td></tr>
<tr><td>Preuve</td><td>Soit $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux injections.
$\forall x, y \in E, fog(x) = fog(y)$
$\Rightarrow g(x) = g(y)$ car f est injective
$\Rightarrow x = y$ car g est injective
Donc fog injective.</td><td>Soit $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux surjections.
$\forall z \in G, \exists y \in F, f(y) = z$ car f surjective.
Or, $\exists x \in E, y = g(x)$ car g surjective.
Donc $z = f(\, g(x)\,) = fog(x)$
Donc fog surjective</td><td>Soit $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux bijections. Cela implique f et g surjectives et injectives. Il vient fog surjective et injective donc bijective.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">Montrons que la fonction $f \begin{Bmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \to x^2 \end{Bmatrix}$ est injective. $f(x) = f(y) \Rightarrow\; x^2 = y^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = y \\ ou \\ x = -y \end{Bmatrix}$
x et y sont positifs donc l'expression $\begin{Bmatrix} x = y \\ ou \\ x = -y \end{Bmatrix}$ est équivalente à $\begin{Bmatrix} x = y \\ ou \\ x = y = 0 \end{Bmatrix}$

Dans les deux cas nous avons donc montré que $x = y. f$ est donc bien injective.
Nous avons déjà vu que la fonction $\ln :\; \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ x \to \ln x \end{cases}$ était injective (exemple précédent)
Nous en déduisons donc que la fonction $\ln o\, f \begin{Bmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \ln\,(x^2) \end{Bmatrix}$ est injective.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Réciproque</th></tr>
<tr><td>Théorème</td><td>Soit $f : E \to F$ une fonction. f est bijective $ssi\ \exists g : F \to E, fog = gof = Id$. Dans ce cas g est unique et nous notons $g = f^{-1}$. g s'appelle la réciproque de la fonction f</td></tr>
<tr><th colspan="2">Preuve</th></tr>
<tr><td colspan="2">
Soit $f : E \to F$ bjiective. Prenons pour g la fonction $F \to E$ qui à tout y de F fait correspondre son antécédent par la fonction f.
$\forall y \in F, fog(y) = f(x) = y$ car x antécédent de y par la fonction f
$\forall x \in E, gof(x) = g\big(f(x)\big) = x$
Donc , $fog = gof = Id$
Si $\exists g : F \to E, fog = gof = Id.$
Soient $x, y \in E\ f(x) = f(y) \Rightarrow gof(x) = gof(y) \Rightarrow x = y$ Donc f injective
Soit $y \in F,\ y = fog(y) = f(\, g(y)\,)$ Donc f surjective.
Il vient f bijective.
g est elle unique ? Soient g et h deux fonctions telles que $fog = gof = foh = hof = Id$
$\forall y \in F\ \exists x \in E, y = f(x)$ (f surjective)
Donc $\forall y \in F\ g(y) = gof(x) = x$ avec $y = f(x)$
De même $h(y) = hof(x) = x$ D'où $\forall y \in F\ g(y) = h(y)$
g et h ayant le même graphe, nous en déduisons qu'elles sont identiques.
</td></tr>
<tr><td>Exemples</td><td>
La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \to x^2 \end{cases}$ admet comme réciproque la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \to \sqrt{x} \end{cases}$
En effet $fog(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x = \sqrt{(x^2)} = gof(x)$
La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \ln(x) \end{cases}$ admet comme réciproque la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to e^x \end{cases}$
En effet $fog(x) = \ln(e^x) = x = e^{\ln(x)} = gof(x)$
</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td>Soient $f : E \to F$ et $G : F \to G$ deux fonctions bijectives. Alors la fonction $h = gof$ est bijective et sa réciproque $h^{-1} = f^{-1}og^{-1}$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Preuve</th></tr>
<tr><td colspan="2">$$gofo(f^{-1}og^{-1}) = go(fof^{-1})og^{-1} = gog^{-1} = Id$$
$$(f^{-1}og^{-1})ogof = f^{-1}o(g^{-1}og)of = Id$$</td></tr>
</table>

Propriété	Les fonctions $f:\begin{cases}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \to x^2\end{cases}$ et $g:\begin{cases}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \ln(x)\end{cases}$ sont deux bijections comme vu précédemment. La fonction $gof:\begin{cases}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \ln(x^2)\end{cases}$ est une bijection et sa réciproque est la fonction $f^{-1}og^{-1}:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to \sqrt{e^x}\end{cases}$

Image directe et réciproque d'une application		
Définition	Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F. On appelle image directe de A et on note $f(A)$ l'ensemble $\{f(x), x \in A\}$ On appelle image réciproque de B et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble $\{\, x \in E, f(x) \in B \,\}$	
Exemples	L'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue est $\mathbb{R}^+$ L'image réciproque de l'ensemble $[-1,1]$ par la fonction $x \to \sin x$ est $\mathbb{R}$	
	Soit $G = \{a, b\}$, $f(G) = \{A\}$ $f^{-1}(\{B\}) = \{c, d\}$