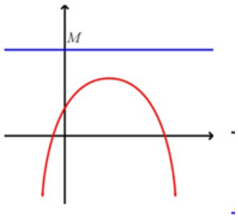
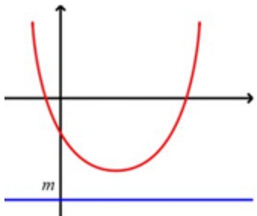
<table>
<tr><th colspan="4">Fonctions majorées/minorées/maximum/minimum</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="3">Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction

- f est dite majorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \forall x \in E, f(x) \leq M$. M est appelé un majorant de f.
- f est dite minorée lorsque $\exists m \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \forall x \in E, f(x) \geq m$. m est appelé un minorant de f.
- f est dite bornée lorsque f est majorée et minorée.
f est dite bornée lorsque $\exists B > 0$ tel que $\forall x \in E, |f(x)| \leq B$

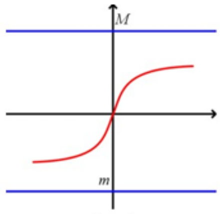
</td></tr>
<tr><td>Illustration</td><td>



f majorée</td><td>



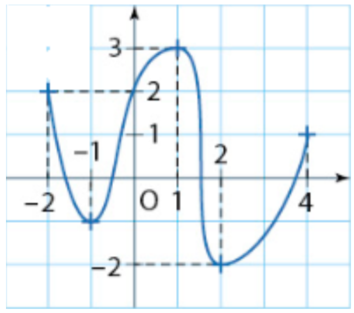
f minorée</td><td>



f bornée</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="3">Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$

- f admet un maximum en a lorsque $\forall x \in E, f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum en a lorsque $\forall x \in E, f(x) \geq f(a)$.

</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">La fonction dont la courbe est représentée ci-contre est définie sur $[-2\,;4]$. Elle admet un maximum en 1 qui vaut 3 et un minimum en 2 qui vaut -2.
La fonction admet un minimum en -1 qui est un minimum local.
(local$\neq$ global). Ce minimum local vaut -1.
(Nous reverrons cette notion plus tard)</td><td>



</td></tr>
</table>

Opérations sur les fonctions monotones

Théorème

Les résultats qui vont suivrent sont complétement transposables aux fonctions strictement monotones.
Soient $f: E \to \mathbb{R}$ et $g: E \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Si f est croissante et g est croissante alors $f + g$ est aussi croissante.
  Si f est décroissante et g est décroissante alors $f + g$ est aussi décroissante.

- Si f et g sont croissantes et positives alors fg est croissante.
  Si f et g sont décroissantes et positives alors fg est décroissante.

Preuve

- Supposons f et g croissantes. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g sont croissantes donc $f(x') \geq f(x)$ et $g(x') \geq g(x)$. Additions ces deux inégalités il vient $f(x') + g(x') \geq f(x) + g(x)$ donc $f + g$ est croissante

  Supposons f et g décroissantes. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g sont décroissantes donc $f(x') \leq f(x)$ et $g(x') \leq g(x)$. Additions ces deux inégalités il vient $f(x') + g(x') \leq f(x) + g(x)$ donc $f + g$ est décroissante

- Supposons f et g croissantes et positives. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g croissantes donc $f(x') \geq f(x)$ et $g(x') \geq g(x)$. $g(x')$ est positif donc il est possible de multiplier les deux membres de l'inégalité $f(x') \geq f(x)$ par $g(x')$ sans changer le sens de l'inégalité.
  $$g(x')f(x') \geq g(x')f(x) \geq g(x)f(x) \text{ car } g(x') \geq g(x)$$
  Nous venons donc de montrer que fg est croissante.

- Supposons f et g décroissantes et positives. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g décroissantes donc $f(x') \leq f(x)$ et $g(x') \leq g(x)$. $g(x')$ est positif donc il est possible de multiplier les deux membres de l'inégalité $f(x') \leq f(x)$ par $g(x')$ sans changer le sens de l'inégalité.
  $$g(x')f(x') \leq g(x')f(x) \leq g(x)f(x) \text{ car } g(x') \leq g(x)$$
  Nous venons donc de montrer que fg est décroissante.

Théorème

Soient $f: E \to \mathbb{R}$ et $g: E \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Si f et g sont monotones de même sens alors fog est croissante
- Si f et g sont monotones de sens opposé alors fog est décroissant

Preuve

- Supposons f et g croissantes. Prenons deux réels x' et x tels que $x' \geq x$
  g est croissante donc $g(x') \geq g(x)$.
  f est croissante donc $f\big(g(x')\big) \geq f\big(g(x)\big)$. fog est donc croissante.
  Même raisonnement si f et g décroissantes

- Suposons f croissante et g décroissante. Prenons deux réels x' et x tels que $x' \geq x$
  g décroissante donc $g(x') \leq g(x)$
  f croissante donc $fog(x') \leq fog(x)$. Nous venons de montrer que fog décroissante.
  Même raisonnement si f décroissante et g croissante.

Théorème

Soit $f: E \to F$ une fonction bijective.
Si f est monotone alors f est strictement monotone et f^{-1} est strictement monotone de même sens.

Preuve

Supposons f croissante. Prenons deux réels x' et x tels que $x' > x$
$x' \geq x$ donc $f(x') \geq f(x)$ (car f croissante). Or l'evéntualité $f(x') = f(x)$ est à exclure car f est bijective. (deux élements de l'ensemble de départ ne peuvent donc pas avoir la même image, cela supposerait que f ne soit pas injective). Nous avons donc $f(x') > f(x)$ ce qui démontre que f est **strictement croissante**.
Prenons toujours $x' > x$ et demandons nous dans quel sens sont rangés $f^{-1}(x')$ et $f^{-1}(x)$
f^{-1} est une bijection donc $f^{-1}(x') = f^{-1}(x)$ est à exclure.
Supposons $f^{-1}(x) > f^{-1}(x')$. f étant strictement croissante cela nous donne $f\big(f^{-1}(x)\big) > f\big(f^{-1}(x')\big) \Rightarrow x > x'$. Nous sommes arrivés à une contradiction, nous pouvons donc exclure $f^{-1}(x) > f^{-1}(x')$
Nous avons donc $f^{-1}(x) < f^{-1}(x')$ ce qui démontrer que f^{-1} est **strictement croissante**.
Le même raisonnement s'appliquerait si f était décroissante.