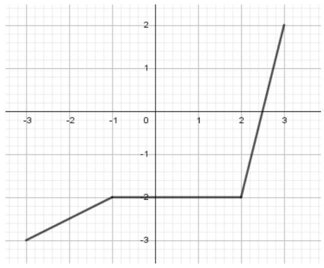
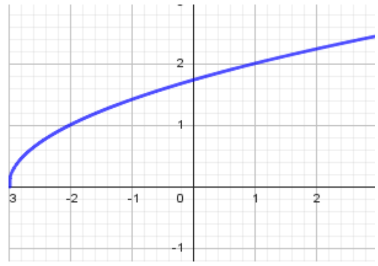
Fonctions monotones

Définition

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.
f est dite croissante si seulement si $\forall x, y \in E\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
f est dite strictement croissante si seulement si $\forall x, y \in E\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Exemple

Considérons les deux fonctions définies sur $[-3; 3]$ dont les courbes sont représentées ci-bas

Fonction f	Fonction g
	
Cette fonction est croissante sur $[-3; 3]$	Cette fonction est strictement croissante sur $[-3; 3]$

Remarque

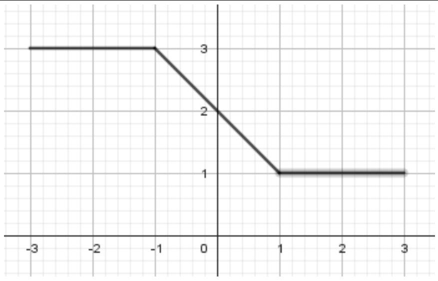
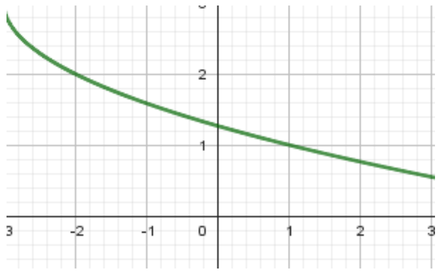
Une fonction croissante est une fonction dont la courbe « monte ». La différence entre une fonction strictement croissante et une fonction croissante réside dans le fait qu'une fonction simplement croissante peut se permettre d'être constante sur un intervalle. Une fonction strictement croissante elle ne peut pas. La courbe doit tout le temps « monter ».
Remarquons que pour la fonction strictement croissante : $1 > -1$ et nous avons bien $g(1) > g(-1)$.
Par contre nous ne pourrions par écrire $f(1) > f(-1)$. En effet $f(1) = f(-1)$
Nous sommes donc obligés de nous contenter pour f de $1 \geq -1 \ \Rightarrow f(1) \geq f(-1)$

Définition

Nous avons les définitions symétriques pour les fonctions décroissantes.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.
f est dite décroissante si seulement si $\forall x, y \in E\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
f est dite strictement croissante si seulement si $\forall x, y \in E\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Exemple

Considérons les deux fonctions définies sur $[-3; 3]$ dont les courbes sont représentées ci-bas

Fonction f	Fonction g
	
Cette fonction est décroissante sur $[-3; 3]$	Cette fonction est strictement décroissante sur $[-3; 3]$

Remarque

Une fonction décroissante est une fonction dont la courbe « descend ». La différence entre une fonction strictement décroissante et une fonction décroissante réside dans le fait qu'une fonction simplement décroissante peut se permettre d'être constante sur un intervalle. Une fonction strictement décroissante elle ne peut pas. La courbe doit tout le temps « descendre ».
Remarquons que pour la fonction strictement décroissante : $3 > 2$ et nous avons bien $g(3) < g(2)$.
Par contre nous ne pourrions par écrire $f(3) < f(2)$. En effet $f(3) = f(2)$
Nous sommes donc obligés de nous contenter pour f de $3 \geq 2 \ \Rightarrow f(3) \leq f(2)$

Définition

Une fonction est dite (strictement) monotone sur un intervalle quand elle est soit (strictement) croissante soit (strictement) décroissante sur cet intervalle.

Théorème

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est strictement monotone alors f est injective.

Preuve

Supposons f strictement croissante. Prenons deux réels x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$
Si $x' > x$ alors $f(x) > f(x')$ ce qui est impossible vues les conditions imposées par l'énoncé.
Si $x' < x$ alors $f(x) < f(x')$ ce qui est impossible vues les conditions imposées par l'énoncé.
Nous en déduisons $x' = x$, la fonction est donc bien injective.

Opérations sur les fonctions monotones	
Théorème	Les résultats qui vont suivrent sont complétement transposables aux fonctions strictement monotones. Soient $f: E \to \mathbb{R}$ et $g: E \to \mathbb{R}$ deux fonctions. • Si f est croissante et g est croissante alors $f + g$ est aussi croissante. Si f est décroissante et g est décroissante alors $f + g$ est aussi décroissante. • Si f et g sont croissantes et positives alors fg est croissante. Si f et g sont décroissantes et positives alors fg est décroissante.

Preuve

- Supposons f et g croissantes. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g sont croissantes donc $f(x') \geq f(x)$ et $g(x') \geq g(x)$. Additionons ces deux inégalités il vient :
  $f(x') + g(x') \geq f(x) + g(x)$ donc $f + g$ est croissante

  Supposons f et g décroissantes. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g sont décroissantes donc $f(x') \leq f(x)$ et $g(x') \leq g(x)$. Additionons ces deux inégalités il vient :
  $f(x') + g(x') \leq f(x) + g(x)$ donc $f + g$ est décroissante

- Supposons f et g croissantes et positives. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g croissantes donc $f(x') \geq f(x)$ et $g(x') \geq g(x)$. $g(x')$ est positif donc il est possible de multiplier les deux membres de l'inégalité $f(x') \geq f(x)$ par $g(x')$ sans changer le sens de l'inégalité.
  $$g(x')f(x') \geq g(x')f(x) \geq g(x)f(x) \text{ car } g(x') \geq g(x)$$
  Nous venons donc de montrer que fg est croissante.

- Supposons f et g décroissantes et positives. Prenons deux réels x et x' tels que $x' \geq x$
  f et g décroissantes donc $f(x') \leq f(x)$ et $g(x') \leq g(x)$. $g(x')$ est positif donc il est possible de multiplier les deux membres de l'inégalité $f(x') \leq f(x)$ par $g(x')$ sans changer le sens de l'inégalité.
  $$g(x')f(x') \leq g(x')f(x) \leq g(x)f(x) \text{ car } g(x') \leq g(x)$$
  Nous venons donc de montrer que fg est décroissante.

Théorème	Soient $f: E \to \mathbb{R}$ et $g: E \to \mathbb{R}$ deux fonctions. • Si f et g sont monotones de même sens alors fog est croissante • Si f et g sont monotones de sens opposé alors fog est décroissant

Preuve

- Supposons f et g croissantes. Prenons deux réels x' et x tels que $x' \geq x$
  g est croissante donc $g(x') \geq g(x)$.
  f est croissante donc $f\big(g(x')\big) \geq f\big(g(x)\big)$. fog est donc croissante.
  Même raisonnement si f et g décroissantes

- Suposons f croissante et g décroissante. Prenons deux réels x' et x tels que $x' \geq x$
  g décroissante donc $g(x') \leq g(x)$
  f croissante donc $fog(x') \leq fog(x)$. Nous venons de montrer que fog décroissante.
  Même raisonnement si f décroissante et g croissante.

Théorème	Soit $f: E \to F$ une fonction bijective. Si f est monotone alors f est strictement monotone et f^{-1} est strictement monotone de même sens.

Preuve

Supposons f croissante. Prenons deux réels x' et x tels que $x' > x$
$x' \geq x$ donc $f(x') \geq f(x)$ (car f croissante). Or l'evéntualité $f(x') = f(x)$ est à exclure car f est bijective. (deux élements de l'ensemble de départ ne peuvent donc pas avoir la même image, cela supposerait que f ne soit pas injective). Nous avons donc $f(x') > f(x)$ ce qui démontre que f est **strictement croissante**.
Prenons toujours $x' > x$ et demandons nous dans quel sens sont rangés $f^{-1}(x')$ et $f^{-1}(x)$
f^{-1} est une bijection donc $f^{-1}(x') = f^{-1}(x)$ est à exclure.
Supposons $f^{-1}(x) > f^{-1}(x')$. f étant strictement croissante cela nous donne $f\big(f^{-1}(x)\big) > f\big(f^{-1}(x')\big) \Rightarrow x > x'$. Nous sommes arrivés à une contradiction, nous pouvons donc exclure $f^{-1}(x) > f^{-1}(x')$
Nous avons donc $f^{-1}(x) < f^{-1}(x')$ ce qui démontre que f^{-1} est **strictement croissante**.
Le même raisonnement s'appliquerait si f était décroissante.