Dérivabilité

Soient λ et g deux fonctions définies sur un intervalle I, soient λ et μ deux réels.

Théorème

$$(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$$

Preuve

$$\frac{(\lambda f+\mu g)(x+h)-(\lambda f+\mu g)(x)}{h}=\frac{\lambda f(x+h)+\mu f(x+h)-\lambda f(x)-\mu g(x)}{h}=\lambda\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\mu\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Donc $\lim_{h\to 0}\frac{(\lambda f+\mu g)(x+h)-(\lambda f+\mu g)(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\lambda\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\mu\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=\lambda f'(x)+\mu g'(x)$

Exemple

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x)=lnx+e^x$

$$f'(x)=\frac{1}{x}+e^x$$

Théorème

$$(fg)'=f'g+g'f$$

Preuve

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+g(x)f(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$; $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$; $\lim\limits_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$; Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

Exemple

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x)=e^x lnx$

$$f'(x)=\frac{e^x}{x}+e^x lnx=e^x(\frac{1}{x}+lnx)$$

Théorème

Lorsque g ne s'annule pas

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Preuve

$\frac{1}{h}\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right]=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}\right]=\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{h}\right]$ (*)

$$\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x+h)+f(x+h)g(x+h)-g(x+h)f(x)}{h}=$$

$$f(x+h)\left[\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\right]+g(x+h)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{h}=-f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$.

Reprenons l'équation $(*)\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right]=\frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x)-f(x)g'(x))$.

Exemple

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x)=\frac{lnx}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}e^x-lnx*e^x}{(e^x)^2}=\frac{\left(\frac{1}{x}-lnx\right)}{e^x}=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-lnx\right)$$

Théorème

Soit f une fonction dérivable de E dans F
Soit g une fonction dérivable de F dans $\mathbb{R}$.
Alors gof est dérivable de E dans $\mathbb{R}$ $(gof)'=(g'of)*f'$

Preuve

Soit x et y deux éléments distincts de E.
Si il existe un intervalle I centré autour de x tel que f est constante alors $f'(x)=0$ mais gof est aussi constante sur cet intervalle donc $(gof)'=0$ et on a bien $(gof)'=(g'of)*f'$
Dans le cas contraire, il existe un intervalle J centré autour de x tel que $\forall y\in J$ $f(y)\neq f(x)$
On peut alors écrire $\forall y\in J$ $\frac{gof(y)-gof(x)}{y-x}=\frac{gof(y)-gof(x)}{f(y)-f(x)}*\frac{(f(y)-f(x))}{y-x}$ (*)
f est dérivable en x donc $\lim\limits_{y\to x}\frac{(f(y)-f(x))}{y-x}=f'(x)$

f est continue en x donc $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$

Il vient en posant $z = f(y)$, $\lim\limits_{y\to x} \frac{gof(y)-gof(x)}{f(y)-f(x)} = \lim\limits_{z\to f(x)} \frac{g(z)-g(f(x))}{z-f(x)} = g'(f(x))$

Revenons à (*)

$\lim\limits_{y\to x} \frac{gof(y)-gof(x)}{y-x} = g'\big(f(x)\big) * f'(x)$

Exemple	Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$
Théorème	Soit f une fonction bijective et dérivable de E dans F. Si f' ne s'annule pas sur E alors f^{-1} est dérivable sur F et sa dérivée vaudra $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$

Preuve

Nous admettrons la dérivabilité.

La formule de la dérivée s'obtient néanmoins facilement avec $fof^{-1} = Id$

$$\forall x \in F, fof^{-1}(x) = x$$

Implique d'après le théorème précédent $f'\big(f^{-1}(x)\big) * (f^{-1})'(x) = 1$

Soit $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ lorsque f' ne s'annule pas.

Exemple	Déterminons l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction $f: \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{x(1-x)} \end{matrix} \right\}$ La fonction $x \to \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^{+}$ Par contre la fonction $\Phi : x \to x(1-x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Un rapide travail sur les variation de Φ nous dit que $\Phi'(x) = 1 - x - x = 1 - 2x$ Donc $\Phi'(x) \leq 0$ pour $1 - 2x \leq 0 \to x \geq \frac{1}{2}$ Φ est donc décroissante sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ $\Phi\ (0) = \Phi\ (1) = 0$ donc Φ est positive sur $[0; 1]$ négative sinon. Nous en déduisons que l'ensemble de définition de f est $[0 ; 1]$ La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+}$ donc f est continue sur $[0 ; 1]$ La fonction $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc f est dérivable sur $]0 ; 1[$ $$\forall x \in]0 ; 1[\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}} * (1-2x)$$