

Fonction puissance
Définition

Soit x un réel strictement positif.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on appelle x puissance y et on note x^y le réel $\exp(y \ln x)$

Remarque

Notons que si $x = e$ alors le réel e^y est égal à $\exp(y \ln e)$ soit $\exp(y)$

A partir de maintenant nous noterons la fonction exponentielle ainsi. $\exp(x) = e^x$

Propriétés

Les règles traditionnelles s'appliquant aux puissances dont les exposants sont des entiers sont conservées. A savoir pour tous x et x' réels strictements >0 et y et y' réels :

$$\ln(x^y) = y \ln x$$

$$x^y * x^{y'} = x^{y+y'}$$

$$(x^y)^{y'} = x^{yy'}$$

$$(xx')^y = x^y x'^y$$

$$x^{-y} = \frac{1}{x^y}$$

Preuve

Toutes ces propriétés découlent directement de la définition de x puissance y : $x^y = \exp(y \ln x)$ et des propriétés de la fonction exponentielle. Il suffit de les écrire.

Propriétés

Soit $y > 0$. La fonction $f : x \rightarrow x^y$ est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$, $f'(x) = yx^{y-1}$

Preuve

$f(x) = x^y = \exp(y \ln x)$. f est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ comme composée de fonctions définies et infiniment dérivables sur $\mathbb{R}^{++}$

$$f'(x) = y \exp(y \ln x) * \frac{1}{x} = \frac{y}{x} \exp(y \ln x) = \frac{y}{x} x^y = yx^{y-1}$$

Propriétés

La fonction $f : x \rightarrow x^y$ est concave pour $y \in [0; 1]$

Preuve

$f'(x) = yx^{y-1}$; $f''(x) = y(y-1)x^{y-2}$; La concavité de f est donc déterminée par le signe de $y(y-1)$.

Ce polynôme en y est strictement négatif pour $y \in [0; 1]$ et positif sinon. Nous en déduisons que f est concave pour $y \in [0; 1]$ et convexe sinon.

Propriété

Positions relatives

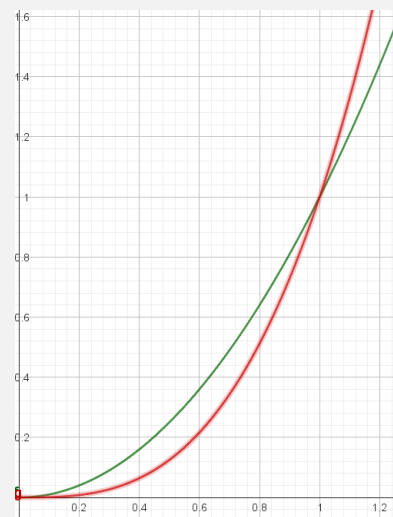
Soient y et z deux réels avec $y \leq z$.

$$\forall x \in]0; 1[\quad x^y \geq x^z$$

$$\forall x > 1, x^y \leq x^z$$

Exemple

La courbe rouge correspond à la courbe de la fonction $x \rightarrow x^3$, la courbe verte correspond à la courbe de la fonction $x \rightarrow x^2$



Preuve	Il suffit de revenir à la définition. $x^y = e^{y \ln x}$ et $x^z = e^{z \ln x}$ Pour $x \neq 0$ $\frac{x^y}{x^z} = \frac{e^{y \ln x}}{e^{z \ln x}} = e^{(y-z) \ln x}$. Pour $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ donc $y \leq z \Rightarrow (y - z) \ln x \geq 0 \Rightarrow$ $e^{(y-z) \ln x} \geq 1 \Rightarrow \frac{x^y}{x^z} \geq 1 \Rightarrow x^y \geq x^z$ Dans le cas où $x > 1$ nous avons $\ln x > 0$ et nous aboutissons donc à l'inégalité contraire.		
	Propriétés	Croissance comparée	Prenons $y > 0$ et $z \in \mathbb{R}$ Nous avons :
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^y} = +\infty$			$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{(\ln x)^z} = +\infty$
Preuve			
$\frac{e^x}{x^y} = \frac{e^x}{e^{y \ln x}} = e^{x - y \ln x} = e^{x(1 - y \frac{\ln x}{x})}$. Nous avons déjà vu dans les propriétés de la fonction $\ln$ que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - y \frac{\ln x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ - Nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^y} = +\infty$ Posons $x = \ln X$. Il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^y} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln X}}{(\ln X)^y} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{(\ln X)^y}$ Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^y} = +\infty$. A fortiori nous avons aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^z} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{(\ln x)^z} = +\infty$ - Nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{(\ln x)^z} = +\infty$. Posons $x = \frac{1}{t}$. Nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{(\ln x)^z} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{1}{t})^y}{(\ln(\frac{1}{t}))^z} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^y (-\ln t)^z} =$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^y (-\ln t)^z} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(-1)^z t^y \ln t^z}$ Donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^y (\ln t)^z = 0$			