Dérivée et variations de fonctions

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I

Théorème

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I
- f est croissante sur I si et seulement si f' est postive sur I
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I

Preuve

- Si f est constante sur I, $\forall x \in I, \forall h \neq 0\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ donc $f'(x) = 0$
- Si f croissante sur I :
  $\forall h > 0\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ car $(f(x+h) \geq f(x))$ donc $f'(x) \geq 0$
  $\forall h < 0\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ car $(f(x+h) \leq f(x)$ et $h \leq 0)$ donc $f'(x) \geq 0$
  Bref, f croissante sur I implique $f'(x) \geq 0$
- Si f décroissante sur I :
  $\forall h > 0\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ car $(f(x+h) \leq f(x))$ donc $f'(x) \leq 0$
  $\forall h < 0\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ car $(f(x+h) \geq f(x)$ et $h \leq 0)$ donc $f'(x) \geq 0$
  Bref, f décroissante sur I implique $f'(x) \leq 0$
  Nous admettrons la réciproque mais l'admettrons plus tard dans l'année.

Remarque

Le théorème précédent nous renseigne sur le fait que l'étude du signe de la dérivée nous rapporte le sens de variation de la fonction. Là où la dérivée est positive, la fonction est croissante, là où la dérivée est négative, la fonction est décroissante. Il est donc primordial d'étudier le signe de la dérivée pour obtenir le tableau de variations de la fonction.

Exemple

Etudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{10x}{1+x^2}$

Nous pouvons de suite remarquer que $f(x) = -\frac{10x}{1+x^2} = -f(x)$
Nous en déduisons que la fonction est impaire.
Nous pouvons donc restreindre son étude à $\mathbb{R}^+$
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{10(1+x^2) - 2x * 10x}{(1+x^2)} = \frac{10 + 10x^2 - 2x * 10x}{(1+x^2)} = \frac{10 + 10x^2 - 20x^2}{(1+x^2)} = \frac{10(1-x^2)}{(1+x^2)}$$

Il nous reste à déterminer le signe de f'
f' est du signe du polynôme P défini par $P(x) = 1 - x^2$
Ce polynôme est négatif en dehors de ses racines qui sont 1 et -1 et positif sinon.
Nous en déduisons le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	5	↘	0

La fonction étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine, nous pouvons donc en déduire le tableau de variations sur $\mathbb{R}$