Intégration. Cours

Intégrale d'une fonction continue et de signe quelconque sur un intervalle

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Preuve

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Soit m un minorant de f sur $[a,b]$. (Pour tout x de $[a,b]$ $f(x) \geq m$)
On pose g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - m$. Pour tout x de $[a,b]$ g positive et continue. D'après un théorème vu précédemment la fonction G : $x \to \int_a^x g(t)\,dt$ est une primitive de la fonction g sur $[a\,;b]$
Posons $F(x) = G(x) + mx$, $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$. F est donc bien une primitive de f sur $[a;b]$

Définition : Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I. Pour a et b deux nombres réels de I, **l'intégrale de a à b de f** est le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I. On la note encore $\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Remarques :

- La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie pour la calculer.
- Notation : On écrit $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = [\boldsymbol{F(x)}]_a^b = \boldsymbol{F(b) - F(a)}$
  En effet soit G une autre primitive. Nous avons $G(x) = F(x) + C \to \boldsymbol{G(b) - G(a) = F(b) - F(a)}$
- Pour tous réels a et b de I, $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = -\int_b^a \boldsymbol{f(x)\,dx}$
  En effet $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$; $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$; $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$

Exemple : Calculons $\int_0^2 (e^x - 2x - 1)\,dx$

La fonction $x \to e^x - 2x - 1$ admet comme primitive $x \to e^x - \frac{2x^2}{2} - x$ soit $x \to e^x - x^2 - x$

$$\int_0^2 (e^x - 2x - 1)\,dx = [e^x - x^2 - x]_0^2 = (e^2 - 2^2 - 2) - (e^0 - 0^2 - 0) = e^2 - 7$$

Propriété : Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de I.
La fonction $G: \left\{ \begin{array}{c} I \to \mathbb{R} \\ x \to \int_a^x \boldsymbol{f(x)} \end{array} \right\}$ est une primitive de f

Preuve

Soit F une primitive quelconque de la fonction f. Alors $\int_a^x f(x) = F(x) - F(a) \Longrightarrow \left(\int_a^x f(x)\right)'(x) = F'(x) = f(x)$

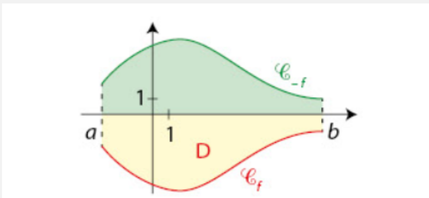
Exemple : La fonction $\int_0^x (e^t - 2t - 1)$dt est donc une primitive de la fonction $x \to e^x - 2x - 1$. Pour la calculer il faut donc calculer l'intégrale.

$$\int_0^x (e^t - 2t - 1)\,dt = [e^t - t^2 - t]_0^x = (e^x - x^2 - x) - (e^0 - 0^2 - 0) = e^x - x^2 - x - 1$$

Propriété : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$
Dans un repère orthogonal on définit le domaine D par la zone située entre la courbe représentative de f, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

Si f est négative sur $[a,b]$ alors l'aire de D est égale à $-\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{D}) = -\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$$



Preuve

Pour des raisons de symétrie l'aire de D est aussi celle du domaine située entre la courbe de la fonction $-f$, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses. Donc $\mathcal{A}(\boldsymbol{D}) = \int_a^b \boldsymbol{-f(x)\,dx}$. Si F est une primitive de f alors $-F$ est une primitive de $-f$. Nous avons donc $\mathcal{A}(\boldsymbol{D}) = \int_a^b \boldsymbol{-f(x)\,dx} = [\boldsymbol{-F(x)}]_a^b = \boldsymbol{-F(b) + F(a)}$
Or $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donc $\mathcal{A}(\boldsymbol{D}) = -\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$

Définition : Par extension l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs complexes se définit ainsi :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b Re[f(x)]dx + i\int_a^b Im[f(x)]dx$$