Intégration. Cours

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et F et G leurs primitives sur $[a,b]$

Propriété	Linéarité	$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	Pour tout réel λ , $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Preuve

Si f et g ont pour primitives F et G alors $f+g$ a pour primitive $F+G$ et λf a pour primitive λF

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = [F+G]_a^b = F(b)+G(b)-F(a)-G(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = [\lambda F]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda\big(F(b)-F(a)\big) = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Exemple	$\int_0^1 (x^3+x^2)dx = \int_0^1 x^3dx + \int_0^1 x^2dx = [\frac{x^4}{4}]_0^1 + [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

Propriété	Relation De Chasles	Pour tous réels c,d,e de l'intervalle $[a,b]$ $\int_c^e f(x)dx = \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx$

Preuve

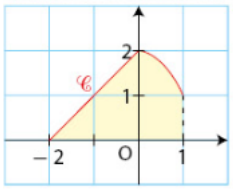
$$\int_c^e f(x)dx = [F]_c^e = F(e)-F(c) = F(e)-F(d)+F(d)-F(c) = \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ si } -2 \le x \le 0 \\ 2-x^2 \text{ si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Calculons l'aire du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$



$$D = \int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

$\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{2*2}{2} = 2\ u.a$ (Aire du demi carré)

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2-x^2)dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2*1 - \frac{1^3}{3} - \left(2*0 - \frac{0^3}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$D = \int_{-2}^1 f(x)dx = 2 + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}\ u.a$$

Propriété	Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle [a,b] • Si pour tout réel x de $[a,b]$, $f(x) \ge 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ • Si pour tout réel x de $[a,b]$, $f(x) \le 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$

Preuve

$F'(x) = f(x)$; $f(x) \ge 0 \to F'(x) \ge 0$ donc F croissante sur $[a,b]$.

$b \ge a \to F(b) \ge F(a) \to F(b) - F(a) \ge 0 \to \int_a^b f(x)dx \ge 0$

Propriété	Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle [a,b] Si pour tout réel x de $[a,b]$, $f(x) \ge g(x)$ alors $\int_a^b (f-g)(x)dx \ge 0$

Preuve

$$f(x) \ge g(x) \to f(x) - g(x) \ge 0 \to \int_a^b (f-g)(x)dx \ge 0$$

<table>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">Montrons que $0 \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{(e-1)}{e^2}$
Pour $x \geq 1, x^2 \geq x \rightarrow -x^2 \leq -x \rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \int_1^2 e^{-x} dx \rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq [-e^{-x}]_1^2$
$\rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq -e^{-2} + e^{-1} \rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e^2}(e-1)$</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td>Inégalité triangulaire (valable aussi dans le cas complexe)</td><td>$\left\lvert \int_a^b f(x)\, dx \right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x) \rvert\, dx$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Preuve</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nous démontrerons cette propriété dans le cas réel et l’admettrons dans le cas complexe plus général.
$\forall x \in [a,b] \quad -\lvert f(x) \rvert \leq f(x) \leq \lvert f(x) \rvert$
$\Rightarrow -\int_a^b \lvert f(x) \rvert\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b \lvert f(x) \rvert$
$\Rightarrow \left\lvert \int_a^b f(x)\, dx \right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x) \rvert$</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">La valeur moyenne d’une fonction f réelle continue sur un intervalle $[a,b]$ est le nombre réel μ défini par :
$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$</td></tr>
</table>