Intervalles

Définition	Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement $\pm\infty$). Nous noterons : • $[a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ tq\ a \leq x \leq b\ \}$ • $]a,b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ tq\ a < x < b\ \}$ • $[a,b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ tq\ a \leq x < b\ \}$ • $]a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}},\ tq\ a < x \leq b\ \}$
Remarque	$[a,b]$ désigne l'ensemble des valeurs comprises entre a et b.
Définition	On appelle intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ tout ensemble I de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\forall x,y\ \in I^2\ tq\ [x,y] \subset\ I$
Remarque	Un intervalle est donc la donnée de deux points et de toutes leurs valeurs intermédiaires.
Propriété	Les ensembles $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b]$ vus plus haut sont des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$

Preuve

Nous ferons la preuve uniquement pour $[a,b]$
Soient $x,y\ \in [a,b]$, nous avons $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $a \leq x \leq b$ et $a \leq y \leq b$. (Nous pouvons supposer $x \leq y$)
Soit $z \in [x,y]$. Nous avons $x \leq z \leq y$ donc $a \leq z \leq b \Longrightarrow z \in [a,b]$. Nous en déduisons que $[x,y] \subset [a,b]$.
Donc $[a,b]$ est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$.
Les preuves sont très similaires pour $]a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b]$

Remarque	Si les ensembles $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b[$ sont des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$, nous sommes en droit de nous demander : sont-ils les seuls ? Peut-on trouver d'autres sortes d'intervalle ? La réponse est non et fait l'objet de la propriété suivante.
Propriété	Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les intervalles de la forme $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b]$

Preuve

Soit I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$. I est une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. Donc I admet une borne inf a et une borne sup b.
Nous distinguerons plusieurs cas :

- $a \in\ I$ et $b \in\ I$
  Par définition des propriétés d'un intervalle $[a,b] \subset I$
  Soit $x \in\ I$. $x \geq a$ et $x \leq b$ par définition des bornes sup et bornes inf. Donc $x \in [a,b]$ ce qui implique $I \subset [a,b]$
  Nous avons donc $[a,b] = I$
- $a \notin\ I$ et $b \in\ I$
  Soit $x \in\ I$, $x \geq a$ et $x \leq b$. (Propriétés des bornes sup et info). Or $a \notin\ I$ donc $x > a$. On a donc $a < x \leq b \Longrightarrow x \in]a,b]$. Donc $I \subset]a,b]$.
  Réçiproquement. Supposons $x \in]a,b]$. Nous avons $a < x \leq b$. Supposons $x \notin I$. $\forall y\ \in]a,x], y \notin I$. (En effet sinon cela impliquerait que $x \in I$ puisque entre y et b). Donc y est un minorant de I strictement plus grand que a. C'est une contradiction. Donc $x \in\ I$ ce qui implique $]a,b]\ \subset I$
- Même type de démonstration pour $a \in\ I$ et $b \notin\ I$
- $a \notin\ I$ et $b \notin\ I$
  Soit $x \in\ I$. Nous avons $a \leq x \leq b$ (Propriétés des bornes sup et inf). Mais a et b ne sont pas dans I. Donc $a < x < b$ ce qui implique $x \in]a,b[$. Donc $I \subset]a,b[$
  Réciproquement. Supposons $x \in]a,b[$. Nous avons $a < x < b$.
  Si $x \notin I$ alors $]a,x[$ n'est pas inclus dans I. Soit z une valeur dans $]a,x[$, z est un minorant de I strictement supérieur à a. Il y a donc une contradiction. $x \in\ I$ et du coup $]a,b[\subset I$