Limites et fonctions complexes

Définition

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexe. Soit $l \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ avec a adhérent à D_f.

- On dit que f tend vers l lorsque x tend vers a lorsque :
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
- On dit que f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque :
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0$ tel que $x > A \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
- On dit que f tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$ lorsque :
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists B < 0$ tel que $x < B \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

Remarque

- Tout comme dans le cas réel l'unicité de la limite est encore d'actualité. Nous pouvons donc écrire : $l = \lim_{x\to a} f(x)$ ou $l = \lim_{x\to +\propto} f(x)$ ou $l = \lim_{x\to -\propto} f(x)$
- $+\propto$ et $-\propto$ n'ont pas de sens dans $\mathbb{C}$. Donc ne vous étonnez pas de ne pas voir des fonctions tendre vers $+\propto$ ou $-\propto$

Propriété

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexe. Soit $l \in \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (attention cette fois a peut aussi être égal à $\pm\propto$) et a adhérent à D_f.

$$l = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lim_{x\to a} Re(f(x)) = Re(l) \\ et \\ \lim_{x\to a} Im(f(x)) = Im(l) \end{Bmatrix}$$

Preuve

$$|f(x)-l| = \sqrt{Re^2(f(x)-l) + Im^2(f(x)-l)}$$

Donc $l = \lim_{x\to a} f(x) \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \Longrightarrow \sqrt{Re^2(f(x)-l) + Im^2(f(x)-l)} < \varepsilon$

Or $|Re(f(x)-l)| \leq \sqrt{Re^2(f(x)-l) + Im^2(f(x)-l)}$ et $|Im(f(x)-l)| \leq \sqrt{Re^2(f(x)-l) + Im^2(f(x)-l)} < \varepsilon$

Donc $|Re(f(x)-l)| \leq \varepsilon$ et $|Im(f(x)-l)| \leq \varepsilon$

Nous avons donc montré $l = \lim_{x\to a} f(x) \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \lim_{x\to a} Re(f(x)) = Re(l) \\ et \\ \lim_{x\to a} Im(f(x)) = Im(l) \end{Bmatrix}$

Réciproquement :

Si $|Re(f(x)-l)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ et $|Im(f(x)-l)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ Alors $|f(x)-l| \leq \sqrt{\varepsilon^2} \leq \varepsilon$

Nous avons donc montré $\begin{Bmatrix} \lim_{x\to a} Re(f(x)) = Re(l) \\ et \\ \lim_{x\to a} Im(f(x)) = Im(l) \end{Bmatrix} \Longrightarrow\ l = \lim_{x\to a} f(x)$

Popriétés

- Les notions de limite à gauche et à droite sont conservées pour les fonctions complexes. Toutes les propriétés qui en découlent sont donc maintenues par rapport aux fonctions réelles.
- Les propriétés concernant l'addition, la soustraction, la multiplication ou le quotient de limites sont aussi maintenues. (Attention toutefois, une fonction complexe ne peut pas tendre vers $\pm\propto$)
- La caractérisation séquentielle de la limite est aussi maintenue