

Connecteurs logiques

Définition	Une proposition est un libelle mathématique pouvant être vrai (V) ou faux (F).
Exemple	$5 > 7$ est une proposition fausse. $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$ est une proposition vraie pour $x > 0$
Exemple	La négation de la propriété $n < 3$ est $n \geq 3$
Définitions	<ul style="list-style-type: none"> La négation d'une proposition P est appelée <i>non P</i>. Elle est vraie ssi P est fausse La conjonction de 2 propriétés P et Q est notée P et Q. Elle est vraie ssi P est vraie et Q est vraie. La disjonction de 2 propriétés P et Q est notée P ou Q. Elle est vraie ssi P est vraie ou Q est vraie.
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> Si P est "$n \geq 3$", alors <i>non P</i> sera "$n < 3$" Si P est "n est un entier pair" et Q est "$0 \leq n \leq 6$" alors P et Q sera "$n \in \{2, 4, 6\}$" Si P est "$n \in \{2, 4, 6\}$" et Q est "$n \in \{6, 8, 10\}$" alors P ou Q sera "$n \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$"
Propriété	<ul style="list-style-type: none"> P et <i>non P</i> est une proposition toujours fausse. P ou <i>non P</i> est une proposition toujours vraie. P et <i>non (non P)</i> sont équivalentes. <i>non (P ou Q)</i> est équivalente à <i>non P</i> et <i>non Q</i> <i>non (P et Q)</i> est équivalente à <i>non P</i> ou <i>non Q</i>
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> Un nombre est forcément pair ou impair. Il ne peut pas être les deux à la fois. Si P est "n est un entier" et Q est "n est compris entre 1 et 6" Alors P et Q sera "$n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$" du coup <i>non (P et Q)</i> sera "$n \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$" <i>non P</i> est "$n \notin \mathbb{N}$" et <i>non Q</i> est "$n > 6$ ou $n < 1$". "<i>non P</i> ou <i>non Q</i>" sera "$n \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$".
Définitions	<ul style="list-style-type: none"> La proposition $P \Rightarrow Q$ qu'on lit "P implique Q" ou "<i>Si P alors Q</i>" est appelée implication. Elle n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse. La proposition $P \Leftrightarrow Q$ qu'on lit "P équivaut à Q" ou "P et Q sont équivalents" est appelée équivalence.
Remarque	<ul style="list-style-type: none"> L'implication $P \Rightarrow Q$ se lit aussi : Q est une condition nécessaire pour que P soit vraie L'implication $P \Rightarrow Q$ se lit aussi : P est une condition suffisante pour que Q soit vraie L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ peut aussi se lire comme $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. P est donc une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit vraie.
Exemple	<ul style="list-style-type: none"> "Avoir une mention au Bac" implique "Pouvoir s'inscrire en Faculté" "Pouvoir s'inscrire en Faculté" est une condition nécessaire au fait d'avoir une mention au Bac. "Avoir une mention au Bac" est une condition suffisante pour « Pouvoir s'inscrire en Faculté » Une condition nécessaire et suffisante pour "Pouvoir s'inscrire en Faculté" est "Avoir son Bac"
Définition	<ul style="list-style-type: none"> La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$ La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est <i>non Q</i> \Rightarrow <i>non P</i>
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> Les proposition <i>non (P \Rightarrow Q)</i> et P et <i>non Q</i> sont équivalentes. Toute implication est équivalente à sa contraposée. Les propositions $P \Rightarrow Q$ et <i>non Q</i> \Rightarrow <i>non P</i> sont équivalentes.
Exemple	Soient P la proposition " <i>J'ai conduit trop vite</i> " et Q la proposition " <i>J'ai eu une amende pour excès de vitesse</i> ". Bien entendu $Q \Rightarrow P$ mais il est clair que cela est équivalent à <i>non P</i> \Rightarrow <i>non Q</i>