Loi de composition interne	
Définition	Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne sur E toute application de ExE dans E
Exemple	• Les lois $+, -, *, /$ sont des lois de composition interne pour $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$. • La loi $-$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$ mais la loi $/$ ne l'est pas. En effet $\forall(x,y) \in \mathbb{Z}^2, x-y \in \mathbb{Z}$ par contre $\frac{x}{y}$ n'appartient pas toujours à $\mathbb{Z}$. $(x=2, y=3)$
Notation	Dans le cas général et afin d'éviter les confusions, une loi de composition interne est souvent notée o
Définitions	On dit d'une loi de composition interne sur un ensemble E qu'elle est : • **Commutative** lorsque $\forall(x,y) \in E^2\ xoy = yox$ • **Associative** lorsque $\forall(x,y,z) \in E^3\ xo(yoz) = (xoy)oz$
Exemple	• La loi $+$ est une loi commutative dans $\mathbb{R}$. La loi $/$ n'est par contre pas commutative dans $\mathbb{R}$. • La loi $*$ est une loi associative dans $\mathbb{R}$. La loi $-$ n'est pas associative dans $\mathbb{R}$. $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ x-(y-z) = x-y+z$. Par contre $(x-y)-z = x-y-z$
Définition	Un élément e d'un ensemble E est dit élément neutre pour la loi de composition interne o, si et seulement si : $\forall x \in E, xoe = eox = x$
Exemples	• 0 est l'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{N}$ • 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}$
Propriété	Soit o une loi de composition interne d'un ensemble E. Si o admet un élément neutre e alors il est unique.
Preuve	
Soient e et e' deux éléments neutre de E. Nous avons $e = eoe' = e'$	
Définition	Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne o et d'un élément neutre e. Soit a un élément de E. On appelle le symétrique de a et on note a^{-1} (s'il existe) l'élément b de E tel que : $aob = boa = e$
Exemples	• Dans $\mathbb{Z}$ muni de l'addition tout élément x a son symétrique, c'est $-x$ • Dans $\mathbb{R}$ muni de la multiplication tout élément non nuel x a son symétrique, c'est $\frac{1}{x}$. Par contre 0 n'a pas de symétrique.
Propriétés	Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne o associative et d'un élément neutre e. 1. Soit a un élément de E. Si a admet un symétrique a^{-1} alors il est unique. 2. Si a et b sont des éléments de E inversibles alors aob l'est aussi et $(aob)^{-1} = b^{-1}o\,a^{-1}$ 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit a un élément de E inversible. En notant $a^n = aoao \dots a\ (n\ fois)$, nous avons : $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ que l'on peut noter a^{-n} 4. Soit a un élément de E. Si a admet un symétrique a^{-1} alors a^{-1} admet aussi un symétrique qui est a
Preuve	
1. Soient b et c tels que : $aob = boa = aoc = coa = e$ $b = boe = bo(aoc) = (boa)oc = eoc = c$ 2. $(aob)\ o\ (b^{-1}o\,a^{-1}) = ao(bob^{-1})o\,a^{-1} = a\ o\ a^{-1} = e$ Et $(b^{-1}o\,a^{-1})\ o(aob) = b^{-1}\ o(a^{-1}o\ a)\ o\ b = b^{-1}ob = e$ Donc $b^{-1}o\,a^{-1} = (aob)^{-1}$ 3. $a^n\ o\ (a^{-1})^n = (aoao \dots a\,)o(a^{-1}oa^{-1}o \dots a^{-1}\,) = e$ de même pour $(a^{-1})^n\ o\ a^n$ 4. Evident	
Définition	Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne o. Soit A un sous ensemble de E. A est dit stable pour E ssi $\forall(x,y) \in A^2\ xoy \in E$
Exemples	• Si l'on considère l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'addition. $\mathbb{Z}$ est un sous ensemble stable. • Si l'on considère l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition. $\mathbb{R}$ est un sous ensemble stable.
Définition	Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne $+$ et $*$ On dit que $*$ est distributive par rapport à $+$ lorsque $\forall(x,y,z) \in E^3 \begin{cases} x*(y+z) = x*y+x*z \\ (y+z)*x = y*x+z*x \end{cases}$
Exemples	La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{N}$