

Morphisme de groupes	
Définition	Soient (G, o_G) et $(G', o_{G'})$ deux groupes. On appelle morphisme de groupe toute application f de (G, o_G) dans $(G', o_{G'})$ telle que : $\forall (x, y) \in G^2, f(x o_G y) = f(x) o_{G'} f(y)$
Exemple	L'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, *)$ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
Définition	Un morphisme de groupe de (G, o_G) dans (G, o_G) est appelé un endomorphisme.
Exemple	Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application f de $\mathbb{U}$ vers $\mathbb{U}$ qui à tout z associe z^n est un endomorphisme de $(\mathbb{U}, *)$ vers $(\mathbb{U}, *)$.
Propriétés	Soit f un morphisme de groupe allant de $(G, \diamond)$ à $(G', \wedge)$. 1. $f(e_G) = e_{G'}$ 2. Soient $(x, y) \in G^2$, $y = x^{-1} \Rightarrow f(y) = f(x)^{-1}$
Preuve	
1. $f(e_G) = f(e_G \diamond e_G) = f(e_G) \wedge f(e_G)$. Mais $f(e_G)$ admet un symétrique dans $(G', \wedge)$. Composons par ce symétrique à gauche. $f(e_G)^{-1} \wedge f(e_G) = f(e_G)^{-1} \wedge f(e_G) \wedge f(e_G) \Rightarrow e_{G'} = f(e_G)$ 2. Soient $(x, y) \in G^2$, $y = x^{-1} \Rightarrow f(y \diamond x) = f(x \diamond y) = f(e_G) = e_{G'}$ Donc $f(x) \wedge f(y) = f(y) \wedge f(x) = e_{G'} \Rightarrow f(y) = f(x)^{-1}$	
Propriétés	Soient $(G_1, o_1), (G_2, o_2)$ et (G_3, o_3) trois groupes. Soit f un morphisme de G_1 dans G_2 et g un morphisme de G_2 dans G_3 Alors $g \circ f$ est un morphisme de G_1 dans G_3
Preuve	
$\forall (x, y) \in G_1$ $g \circ f(x o_1 y) = g[f(x o_1 y)] = g[f(x) o_2 f(y)] = g[f(x)] o_3 g[f(y)] = g \circ f(x) o_3 g \circ f(y)$	
Propriétés	Soit f un morphisme de $(G, \diamond)$ dans $(H, \wedge)$ Soient G' et H' deux sous groupes de G et H Alors $f(G')$ et $f^{-1}(H')$ sont des sous groupes de H et G
Preuve	
Nous avons $e_H = f(e_G)$. $e_G \in G'$ donc $e_H \in f(G')$. $e_H \in H'$ donc $e_G \in f^{-1}(H')$. Donc $f(G')$ et $f^{-1}(H')$ sont non vides. $\forall (a, b) \in f(G')^2$. $\exists (c, d) \in G'$ tels que $a = f(c)$ et $b = f(d)$. $\Rightarrow$ $a \wedge b^{-1} = f(c) \wedge f(d)^{-1} = f(c) \wedge f(d^{-1}) = f(c \diamond d^{-1})$. G' est un sous groupe donc $c \diamond d^{-1} \in G'$ Donc $a \wedge b^{-1} \in f(G')$. $f(G')$ est bien un sous groupe. $\forall (c, d) \in f^{-1}(H')^2$. $\exists (a, b) \in H'$ tels que $a = f(c)$ et $b = f(d)$. $f(c \diamond d^{-1}) = f(c) \wedge f(d)^{-1} = f(c) \wedge f(d)^{-1} = a \wedge b^{-1} \in H'$. H' est un sous groupe donc $a \wedge b^{-1} \in H'$. $c \diamond d^{-1} \in f^{-1}(H')$ $f^{-1}(H')$ est bien un sous groupe.	
Définition	Soit f un morphisme de $(G, \diamond)$ dans $(H, \wedge)$ On note : • $Imf = f(G)$. (Imf est appelée l'image de f) • $Kerf = f^{-1}(\{e_H\})$. ($Kerf$ est appelé noyau de f)
Propriétés	Soit f un morphisme de $(G, \diamond)$ dans $(H, \wedge)$ 1. Imf et $Kerf$ sont des sous-groupes de $(G, \diamond)$ et $(H, \wedge)$ 2. f injectif ssi $Kerf = \{e_G\}$ 3. f surjectif ssi $Imf = H$
Preuve	
1. $Imf = f(G)$ et $Kerf = f^{-1}(e_H)$ Donc d'après la propriété précédente Imf et $Kerf$ sont des sous-groupes de $(G, \diamond)$ et $(H, \wedge)$. 2. Supposons f injective. Soit $x \in Kerf$. $f(x) = e_H \Rightarrow f(x) = f(e_G)$. Or f étant injective cela implique $x = e_G$ Donc $Kerf$ est inclus dans $\{e_G\}$. L'inclusion réciproque étant évidente, nous avons $Kerf = \{e_G\}$ Supposons $Kerf = \{e_G\}$. $\forall (x, y) \in G^2$ $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) \wedge f(y)^{-1} = e_H \Rightarrow f(x \diamond y^{-1}) = e_H \Rightarrow$ $x \diamond y^{-1} \in Kerf \Rightarrow x \diamond y^{-1} = e_G \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injective. 3. Supposons f surjective. Soit $y \in H$. f surjective donc $\exists x \in G$ tel que $y = f(x) \Rightarrow y \in Imf$ Donc $H \subset Imf$ L'inclusion réciproque est évidente donc $H = Imf$ Supposons $Imf = H$. $\forall y \in H \Rightarrow y \in Imf \Rightarrow \exists x \in G$ tel que $y = f(x) \Rightarrow f$ surjective	

Exemples	- L'application module est un morphisme surjectif de $(\mathbb{C}, *)$ vers $(\mathbb{R}^{++}, *)$. Son noyau est le groupe $(\mathbb{U}, *)$ - L'exponentielle complexe est un morphisme surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, *)$. Son noyau est l'ensemble des réels de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Définitions	- Nous appellerons isomorphisme un morphisme bijectif. Lorsqu'un isomorphisme possède un ensemble de départ et d'arrivée identiques on parle d'automorphisme. - Lorsqu'il existe un isomorphisme entre deux groupes, on dit que ces deux groupes sont isomorphes.
Exemple	La fonction logarithme népérien est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{++}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. Les deux groupes $(\mathbb{R}^{++}, *)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont donc isomorphes.
Propriétés	- Soient $f : (G_1, +_1) \rightarrow (G_2, +_2)$ et $g : (G_2, +_2) \rightarrow (G_3, +_3)$ deux isomorphismes. Alors $g \circ f : (G_1, +_1) \rightarrow (G_3, +_3)$ est aussi un isomorphisme. - Soit $f : (G_1, +_1) \rightarrow (G_2, +_2)$ un isomorphisme. Alors $f^{-1} : (G_2, +_2) \rightarrow (G_1, +_1)$ est aussi un isomorphisme. - La relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des groupes.
Preuve	
- Nous avons déjà vu que $g \circ f$ était un morphisme. De plus la composée de deux bijections est une bijection. Donc $g \circ f$ est un isomorphisme. $f^{-1} : (G_2, +_2) \rightarrow (G_1, +_1)$ est-il un morphisme de groupe ? $\forall (x, y) \in G_2^2, f$ étant bijective $\exists (a, b) \in G_1^2$ tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$ $f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) = x +_2 y$ Donc $f^{-1}(x +_2 y) = a +_1 b = f^{-1}(x) +_1 f^{-1}(y)$. f^{-1} est donc bien un morphisme de groupes. La réciproque d'une bijection étant une bijection, f^{-1} est donc un isomorphisme de groupes. - Symbolisons la relation « être isomorphe à » par « $\equiv$ » - Soit G un groupe quelconque. $G \equiv G$. En effet l'identité est un isomorphisme. La relation est donc reflexive - Soient G_1 et G_2 deux groupes tels que $G_1 \equiv G_2$. Cela signifie qu'il existe un isomorphisme entre G_1 et G_2. La réciproque d'un isomorphisme étant aussi un isomorphisme il existe un isomorphisme entre G_2 et G_1. La relation est donc symétrique. - Soient G_1, G_2 et G_3 trois groupes tels que $G_1 \equiv G_2$ et $G_2 \equiv G_3$. Il existe donc un isomorphisme f entre G_1 et G_2 et un isomorphisme g entre G_2 et G_3. Comme vu précédemment $f \circ g$ est un isomorphisme entre G_1 et G_3. Donc $G_1 \equiv G_3$. La relation est donc transitive. La relation « $\equiv$ » est bien une relation d'équivalence.	
Exemple	Nous avons déjà vu que la fonction logarithme népérien était un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{++}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. Il est donc naturel de penser que la fonction exponentielle (réciproque de la fonction logarithme) est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^{++}, *)$