

Partie entière

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $m \in \mathbb{Z}, m \leq x < m + 1$. Cet entier m est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$

Preuve

- Supposons $x > 0$ et considérons $A_x = \{n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$
 A_x est non vide puisque $0 \in A_x$ et A_x est majorée dans $\mathbb{R}$ par x
La propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ nous donne alors l'existence de $\sup A_x$.
Posons $m = \sup A_x$. Nous ne sommes à ce stade pas sûrs que $m \in \mathbb{N}$
Supposons que $m \notin \mathbb{N}$ alors il existe un entier p que $p < m < p + 1$
Considérons $\frac{m+p}{2}$. Ce nombre est situé entre l'entier situé avant m et m . Il majore donc A_x tout en étant strictement inférieur à m . Cela est contraire à la définition de m . Nous avons donc $m \in \mathbb{N}$. Posons maintenant $\lfloor x \rfloor = m$. $m \leq x$ (déjà vu), et bien sur $x < m + 1$ (si $x \geq m + 1$, on aurait $m < m + 1 \leq x$ ce qui entrainerait $m + 1 \in A_x$ avec m majorant de A_x ce qui n'a pas de sens). Nous avons donc bien montré l'existence de $m \in \mathbb{Z}$, tel que $m \leq x < m + 1$.
 - Si $x = 0$ alors $m = 0$ convient très bien.
 - Si $x < 0$ alors $-x > 0$ donc d'après le premier point $\exists m \in \mathbb{Z}, m \leq -x < m + 1$ ce qui implique $-m - 1 \leq x < -m$. Posons $p = -m - 1$. Nous avons montré l'existence d'un $p \in \mathbb{Z}, p \leq x < p + 1$
 - Il reste maintenant à démontrer l'unicité. Supposons deux entiers m et p tels que $m \leq x < m + 1$ et $p \leq x < p + 1$ cela donne $-p - 1 \leq -x < -p$ soit en additionnant les deux lignes $m - p - 1 \leq 0 < m - p + 1$. Posons $q = m - p$. Il vient $q - 1 \leq 0 < q + 1$. Soit $q > -1$ et $q \leq 1$. Cela implique $q = 0$ ou $q = 1$.
 $q = 1 \Rightarrow m = p + 1$ Donc si $p \leq x < p + 1$ cela implique $m - 1 \leq x < m$ or nous savons que $m \leq x < m + 1$, nous sommes donc arrivés à une contradiction.
Il ne reste plus que $q = 0$ ce qui entraine $m = p$. L'unicité est donc établie.

Exemple

$\lfloor -3,5 \rfloor = -4$; $\lfloor 2,6 \rfloor = 2$; $\lfloor 1 \rfloor = 1$

Exemple

Exemple d'utilisation de la partie entière d'un nombre dans le domaine des suites.
Soit (U_n) définie par $U_n = e^{-n^2}$. Il paraît clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$. A partir de quel rang a-t-on $U_n < 0,01$
 $e^{-n^2} < 0,01 \Rightarrow -n^2 < \ln(0,01) \Rightarrow n^2 > -\ln(0,01) \Rightarrow n > \sqrt{-\ln(0,01)}$
Le rang demandé est donc $\lfloor \sqrt{-\ln(0,01)} \rfloor + 1$

Illustration

Voici ci-contre la courbe de la fonction partie entière.
Cette courbe associe à tout réel x le nombre $\lfloor x \rfloor$

