Equations différentielles.

Primitives.	
Définition	Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dire que F est une **primitive** de f sur I signifie que F est dérivable sur I et que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.
Vocabulaire	Une primitive d'une fonction f sur un intervalle I et solution sur I de l'équation différentielle $y' = f$
Exemple	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} + 4x$. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En effet F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $F'(x) = \frac{1}{3} * 3 * e^{3x} + 2 * 2x = e^{3x} + 4x = f(x)$
Propriété	Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive.

Primitives d'une même fonction	
Propriété	Soit F une primitive sur un intervalle I d'une fonction continue sur I. 1. Pour tout réel C, la fonction $G : x \to F(x) + C$ est aussi une primitive de f sur I. 2. Toute primitive de la fonction f sur I est de la même forme que G

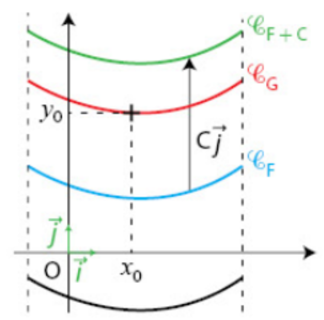
Preuve

1. Soit G définie par $G : x \to F(x) + C$. F est dérivable sur I donc G aussi. $G'(x) = F'(x) = f(x)$ pour tout x de I. Donc G est une primitive de f sur I.
2. Supposons que H soit une primitive de f sur I. Nous avons $H'(x) = F'(x) = f(x)$ donc $(H - F)'(x) = 0$
   Une fonction dont la dérivée est nulle est constante. Il vient qu'il existe un réel C tel que $H - F = C \to H = F + C$
   H est donc bien de la même forme.

Remarque	• Une fonction f n'admet donc pas **une** primitive mais une **infinité** de primitives toutes différant d'une constante. • L'équation différentielle $y' = f$ n'admet donc pas **une** solution mais une **infinité**. La résoudre c'est les trouver toutes.
Exemple	Soit $f: x \to x^3 - e^{-x}$ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle $y' = f$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ toutes de la forme : $x \to \frac{x^4}{4} + e^{-x} + C$ où C représente un réel quelconque. Cette expression est la forme générale d'une primitive de la fonction f.
Propriété	Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Il existe une **unique** primitive G de f sur l'intervalle I telle que $\boldsymbol{G(x_0) = y_0}$ où x_0 est un nombre réel donné de I et y_0 un nombre réel donné.

Preuve

Nous savons que toute primitive de f s'écrit
$G(x) = F(x) + C$ où C représente un réel quelconque. $G(x_0) = y_0$ donc $F(x_0) + C = y_0 \to \boldsymbol{C = y_0 - F(x_0)}$.
C étant déterminé, G est donc fixé de manière unique : $\boldsymbol{G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)}$



Exemple	Reprenons la fonction $f: x \to x^3 - e^{-x}$ et déterminons son unique primitive F telle que $F(0) = 0$ Nous savons qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ s'écrit $F(x) = x^3 - e^{-x} + C$ où C est un réel quelconque. $F(0) = 0$ donc $0^3 - e^{-0} + C = 0 \to -1 + C = 0 \to \boldsymbol{C = 1}$; $F(x) = \boldsymbol{x^3 - e^{-x} + 1}$ est donc l'unique primitive de f s'annulant en 0.