Intégration. Cours

Primitives. Définition	
Définition	Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction F est appelée une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et $F' = f$
Propriété	Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I alors toute primitive de f diffère de F d'une constante.
Preuve	
Soit G une primitive quelconque de f. $(G-F)' = 0$. Donc $G - F = k$ avec k réel.	

Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Preuve
e^x	e^x	Il suffit de dériver la primitive, vous devriez aisément retomber sur la fonction
$\ln x$	$x\ln x - x$	
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$(-\ln\lvert\cos\ \rvert)'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$
$sh\ x$	$ch\ x$	$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Longrightarrow (ch\ )'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\ x$
$ch\ x$	$sh\ x$	$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Longrightarrow (sh\ )'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\ x$
$th\ x$	$\ln ch\ x$	$(\ln\ o\ ch)'(x) = \frac{sh\ x}{ch\ x} = th\ x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan\ x$	Appelons f la dérivée de la fonction $Arctan$. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(Arctan\ x) = x \Longrightarrow \left(1 + tan^2(Arctan\ x)\right) * f(x) = 1$ (En dérivant) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin\ x$	Appelons f la dérivée de la fonction $Arcsin$. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(Arcsin\ x) = x \Longrightarrow (\cos(Arcsinx) * f(x) = 1$ (En dérivant) $f(x) = \frac{1}{\cos(Arcsin\ x)}$ Or $\cos^2(Arcsin\ x) + \sin^2(Arcsin\ x) = 1 \Longrightarrow \cos^2(Arcsin\ x) = 1 - x^2$ $\Longrightarrow \cos(Arcsin\ x) = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

<table>
<tr><th colspan="3">Primitives de fonctions composées</th></tr>
<tr><th>Fonction</th><th>Primitive</th><th>Preuve</th></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{u'e^u}$</td><td>$\boldsymbol{e^u}$</td><td rowspan="6">En dérivant la colonne Primitive à l'aide de la formule $(fog)' = f'(g) * g'$ vous devriez aisément retomber sur la colonne Fonction</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$</td><td>$\boldsymbol{ln\ |u|}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{u'u^\alpha}$
$\boldsymbol{(\alpha \neq -1)}$</td><td>$\boldsymbol{\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{u'cos\ u}$</td><td>$\boldsymbol{sin\ u}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\frac{u'}{1+u^2}}$</td><td>$\boldsymbol{Arctan\ u}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$</td><td>$\boldsymbol{Arcsin\ u}$</td></tr>
</table>