Equations différentielles.

Résolution d'équations différentielles du premier ordre avec coefficients constants

Contexte

Nous traitons dans ce chapitre les équations différentielles linéaires du premier ordre avec coefficients constants. Ce chapitre est donc une redite (ou un approfondissement) de ce qui a été vu en terminale. Nous verrons dans un autre chapitre les équations différentielles linéaires du premier ordre avec coefficients non constants.

Théorème

1. Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ ou $y' - ay = 0$ avec a réel non nul ont pour solution les fonctions y de la forme $y(x) = Ke^{ax}$ avec K réel
2. Pour tout couple de réels (x_0, y_0) il existe une unique solution y de l'équation $y' = ay$ vérifiant $y(x_0) = y_0$

Preuve

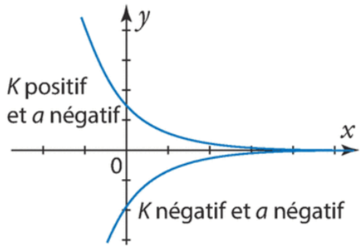
1. Pour démontrer que toutes les solutions y de l'équation différentielle $y' = ay$ ont pour expression $y(x) = Ke^{ax}$ il faut d'abord démontrer que les solutions de la forme $x \to Ke^{ax}$ sont solutions de l'équation. Posons $y(x) = Ke^{ax}$ $y'(x) = Kae^{ax}$, donc $y'(x) = ay(x)$; y est bien solution de l'équation différentielle.
   Réciproquement si y est une solution montrons qu'elle est de la forme $y(x) = Ke^{ax}$. Soit y une solution. Posons $t(x) = y(x)e^{-ax}$. Il vient
   $t'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = e^{-ax}\big(y'(x) - ay(x)\big) = 0$ donc la fonction t est une constante. Nous notons $t = K$ avec K réel. $t(x) = y(x)e^{-ax} \to y(x) = t(x)e^{ax} = Ke^{ax}$ donc si y est une solution alors $y(x) = Ke^{ax}$. Nous avons démontré que toutes les solutions de l'équation $y' = ay$ étaient de la forme $x \to Ke^{ax}$
2. Toutes les solutions y de l'équation sont de la forme $y(x) = Ke^{ax}$. Lorsque $y(x_0) = y_0$ nous avons $y_0 = Ke^{ax_0}$ donc $K = y_0e^{-ax_0}$. Nous pouvons donc ecrire $y(x) = y_0e^{-ax_0}e^{ax} = y_0e^{a(x-x_0)}$. La solution est déterminée de manière unique.

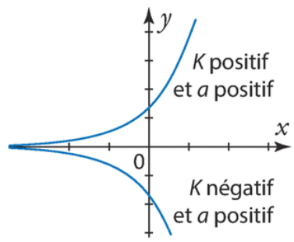
Exemple

Trouvons la solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ vérifiant $y(0) = 2$
Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ke^{3x}$. $y(0) = 2 \to Ke^{3*0} = 2 \to K = 2$
Donc **la solution** de l'équation différentielle $y' = 3y$ est $y(x) = 2e^{3x}$

Remarque

Voici l'allure des courbes des fonctions $x \to Ke^{ax}$ obtenues pour K positif puis pour K négatif et en faisant varier le coefficient a





Théorème

Nous savons désormais résoudre les équations différentielles linéaires, homogènes du premier ordre du type $\boldsymbol{y' - ay = 0}$. Nous allons maintenant apprendre à résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre de de la forme $\boldsymbol{y' - ay = b(x)}$ où a est un réel non nul et $b : x \to b(x)$ une fonction quelconque définie sur un intervalle I.

1. Les solutions de cette équation sont du type $y: x \to Ke^{ax} + f(x)$ où f est une solution particulière de l'équation $\boldsymbol{y' - ay = b(x)}$ et K un réel quelconque.

2. Pour tout couple de réels (x_0, y_0), il existe une unique fonction y solution prenant en x_0 la valeur y_0 c'est-à-dire telle que $y(x_0) = y_0$

Preuve

1. Montrons d'abord que si $y(x) = Ke^{ax} + f(x)$ avec f solution particulière de l'équation, alors y est solution de l'équation différentielle.

    - Si $y(x) = Ke^{ax} + f(x)$ alors $y'(x) = Kae^{ax} + f'(x)$; $ay(x) = a\,Ke^{ax} + af(x)$
    Donc $y'(x) - ay = Kae^{ax} + f'(x) - \left(a\,Ke^{ax} + af(x)\right) = f'(x) - af(x) = b(x)$ car f est une solution particulière de l'équation avec second membre. Donc oui y est solution de l'équation différentielle.

    - Réciproquement supposons que y est solution et montrons qu'alors $y(x) = Ke^{ax} + f(x)$
    Nous savons que f est une solution particulière donc $f' - af = b(x)$
    Si y est solution alors $y' - ay = b(x)$ Nous avons donc $\begin{Bmatrix} f' - af = b(x) \\ y' - ay = b(x) \end{Bmatrix}$
    En retranchant ces deux équations il vient $y' - f' - a(y - f) = 0$ soit $(y - f)' - a(y - f) = 0$
    Donc $y - f$ est solution de l'équation $Y' - aY = 0$. Or le théorème vu précédemment nous assure que les solutions de cette équation sont de la forme :$x \to Ke^{ax}$ avec K réel. Donc $y - f = Ke^{ax} \Longrightarrow y = f + Ke^{ax}$

2. Soit y une solution alors $y(x) = Ke^{ax} + f(x)$ avec f solution particulière de l'équation.
Si $y(x_0) = y_0$ alors $Ke^{ax_0} + f(x_0) = y_0 \Longrightarrow K = e^{-ax_0}(y_0 - f(x_0))$
Donc $y(x) = Ke^{ax} + f(x) = e^{-ax_0}\left(y_0 - f(x_0)\right)e^{ax} + f(x) = e^{a(x-x_0)}\left(y_0 - f(x_0)\right) + f(x)$
L'unicité de la solution est donc démontrée.

Méthode (Résumé)	Pour déterminer les solutions des équations du type $y' = ay + b(x)$ avec a nombre réel non nul et b fonction donnée. 1. On cherche une fonction f solution particulière de l'équation $y' - ay = b$ 2. On cherche ensuite les solutions de l'équation $y' = ay$ soit les fonctions de la forme $x \to Ke^{ax}$ 3. Toute solution de l'équation $y' = ay + b(x)$ s'écrira donc $x \to Ke^{ax} + f(x)$
Exemple	Considérons l'équation différentielle $y' - y = x$ définie sur $\mathbb{R}$. 1. Résolvons d'abord l'équation particulière avec second membre. Nous pouvons chercher une fonction de la forme : $f(x) = Ax + B$. $f'(x) - f(x) = A - (Ax + B) = -Ax + A - B$. Il suffit donc de prendre $A = -1$ et $B = -1$ pour que $f'(x) - f(x) = x$. Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc $f : x \to -(x + 1)$ 2. Les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont $y(x) = Ke^{x}$ 3. Toute solution de l'équation différentielle $y' - y = x$ s'écrira donc $y(x) = Ke^{x} - (x + 1)$
Remarque	Nous avons dans ce chapitre traité les équations différentielles linéaires du premier ordre parmi les fonctions à valeurs réelles. Cette théorie s'étend sans mal aux fonctions à valeur complexe. Les solutions de l'équation $\boldsymbol{y' - ay = b(x)}$ où b est une fonction à valeur complexe et a un complexe sont du type $y(x) = Ke^{ax} + g(x)$ où K est un nombre complexe et g une fonction complexe solution particulière de l'équation avec second membre. Les preuves sont rigoureusement identiques.