Equations différentielles.

<table>
<tr><th colspan="2">Résolution d'équations différentielles du premier ordre avec coefficients non constants</th></tr>
<tr><td>Contexte</td><td>Il s'agit ici de résoudre ici les équations du type $y' - a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I. Nous nous intéresserons dans un premier temps aux fonctions réelles.
Là encore nous découperons le problème en deux :
• Résolution de l'équation homogène.
• Résolution de l'équation avec second membre.</td></tr>
<tr><td>Théorème</td><td>1. Les équations différentielles de la forme $y' = a(x)y$ ou $y' - a(x)y = 0$ avec a fonction ont pour solution les fonctions y de la forme $y(x) = Ke^{A(x)}$ avec K réel et A primitive de a.
2. Pour tout couple de réels (x_0, y_0) il existe une unique solution y de l'équation $y' = a(x)y$ vérifiant $y(x_0) = y_0$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Preuve</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Pour démontrer que toutes les solutions y de l'équation différentielle $y' = a(x)y$ ont pour expression $y(x) = Ke^{A(x)}$ il faut d'abord démontrer que les solutions de la forme $x \to Ke^{A(x)}$ sont solutions de l'équation. Posons $y(x) = Ke^{A(x)}, y'(x) = KA'(x)e^{A(x)} = Ka(x)e^{A(x)} = a(x)y(x)$, y est bien solution de l'équation différentielle. Réciproquement si y est une solution montrons qu'elle est de la forme $y(x) = Ke^{A(x)}$. Soit y une solution. Posons $t(x) = y(x)e^{-A(x)}$ avec A primitive de a (La primitive existe puisque a est continue). Il vient :$t'(x) = y'(x)e^{-A(x)} - y(x)A'(x)e^{-A(x)} = e^{-A(x)}\big(y'(x) - a(x)y(x)\big) = 0$ donc la fonction t est une constante. Nous notons $t = K$ avec K réel. $t(x) = y(x)e^{-A(x)} \to y(x) = t(x)e^{A(x)} = Ke^{A(x)}$ donc si y est une solution alors $y(x) = Ke^{A(x)}$. Nous avons démontré que toutes les solutions de l'équation $y' = a(x)y$ étaient de la forme $x \to Ke^{A(x)}$
2. Toutes les solutions y de l'équation sont de la forme $y(x) = Ke^{A(x)}$. Lorsque $y(x_0) = y_0$ nous avons $y_0 = Ke^{A(x_0)}$ donc $K = y_0e^{-A(x_0)}$. Nous pouvons donc ecrire $y(x) = y_0e^{-A(x_0)}e^{A(x)} = y_0e^{A(x)-A(x_0)}$. La solution est déterminée de manière unique.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>Trouvons la solution de l'équation différentielle $y' = 3xy$ vérifiant $y(0) = 2$
Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ke^{\frac{3x^2}{2}}$. $y(0) = 2 \to Ke^{3*0} = 2 \to K = 2$
Donc la solution de l'équation différentielle $y' = 3xy$ vérifiant $y(0) = 2$ est $y(x) = 2e^{\frac{3x^2}{2}}$</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td>Nous traitons ici les équations du type $y' - a(x)y = b(x)$ (1). Pour être complétement exhaustif il faudrait traiter les équations du type $c(x)y' - a(x)y = b(x)$ (2). où a, b, c sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I. Néanmoins en se restreignant dans I à des intervalles où la fonction c ne s'annule pas, l'équation (2) devient immédiatement $y' - \frac{a(x)}{c(x)}y = \frac{b(x)}{c(x)}$ et nous voilà ramenés à une équation du type (1)</td></tr>
<tr><td>Théorème</td><td>Nous savons désormais résoudre les équations différentielles linéaires, homogènes du premier ordre du type $\boldsymbol{y' - a(x)y = 0}$. Nous allons maintenant apprendre à résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre de de la forme $\boldsymbol{y' - a(x)y = b(x)}$ où a et b sont des fonctions quelconque définies sur un intervalle I.

1. Les solutions de cette équation sont du type $y: x \to Ke^{A(x)} + f(x)$ où f est une solution particulière de l'équation $\boldsymbol{y' - a(x)y = b(x)}$ et K un réel quelconque.

2. Pour tout couple de réels (x_0, y_0), il existe une unique fonction y solution prenant en x_0 la valeur y_0 c'est-à-dire telle que $y(x_0) = y_0$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Preuve</th></tr>
</table>

1. Montrons d'abord que si $y(x) = Ke^{A(x)} + f(x)$ avec f solution particulière de l'équation, alors y est solution de l'équation différentielle.

   - Si $y(x) = Ke^{A(x)} + f(x)$ alors $y'(x) = Ka(x)e^{A(x)} + f'(x)$; $a(x)y(x) = a(x)\,Ke^{A(x)} + a(x)f(x)$
     Donc $y'(x) - a(x)y = Ka(x)e^{ax} + f'(x) - \left(a(x)\,Ke^{A(x)} + a(x)f(x)\right) = f'(x) - af(x) = b(x)$ car f est une solution particulière de l'équation avec second membre. Donc oui y est solution de l'équation différentielle.

   - Réciproquement supposons que y est solution et montrons qu'alors $y(x) = Ke^{A(x)} + f(x)$
     Nous savons que f est une solution particulière donc $f' - a(x)f = b(x)$
     Si y est solution alors $y' - ay = b(x)$ Nous avons donc $\begin{cases} f' - a(x)f = b(x) \\ y' - a(x)y = b(x) \end{cases}$
     En retranchant ces deux équations il vient $y' - f' - a(x)(y - f) = 0$ soit $(y - f)' - a(x)(y - f) = 0$
     Donc $y - f$ est solution de l'équation $Y' - a(x)Y = 0$. Or le théorème vu précédemment nous assure que les solutions de cette équation sont de la forme :$x \to Ke^{A(x)}$ avec K réel. Donc $y(x) - f(x) = Ke^{A(x)} \Rightarrow y(x) = f(x) + Ke^{A(x)}$

2. Soit y une solution alors $y(x) = Ke^{A(x)} + f(x)$ avec f solution particulière de l'équation.
   Si $y(x_0) = y_0$ alors $Ke^{A(x_0)} + f(x_0) = y_0 \Rightarrow K = e^{-A(x_0)}(y_0 - f(x_0))$
   Donc $y(x) = Ke^{A(x)} + f(x) = e^{-A(x_0)}\left(y_0 - f(x_0)\right)e^{A(x)} + f(x) = e^{A(x)-A(x_0)}\left(y_0 - f(x_0)\right) + f(x)$
   L'unicité de la solution est donc démontrée.

Méthode (Résumé)	Pour déterminer les solutions des équations du type $y' - a(x)y = b(x)$ avec a nombre réel non nul et b fonction donnée. 1. On cherche une fonction f solution particulière de l'équation $y' - a(x)y = b(x)$ 2. On cherche ensuite les solutions de l'équation $y' - a(x)y = 0$ soit les fonctions de la forme $x \to Ke^{A(x)}$ 3. Toute solution de l'équation $y' - a(x)y = b(x)$ s'écrira donc $x \to Ke^{A(x)} + f(x)$
Remarque	La phase 1. du résumé ci-dessus n'est pas si facile. Comment trouver par exemple une solution particulière de l'équation $y' - 3xy = x$. Nous allons utiliser pour cela la méthode de la **variation de la constante**.
Propriété	Soient a et b deux fonctions continues et définies sur un intervalle I. Une solution particulière de l'équation $y' - a(x)y = b(x)$ s'écrit : $\int_a^x b(t)e^{-A(t)}\,dt$ avec $a \in I$

Preuve

Nous savons que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(x) = Ke^{A(x)}$ où K est un réel et A la primitive de a.
Cherchons une solution particulière sous la forme $f : x \to K(x)e^{A(x)}$ où cette fois K est une fonction (Nous faisons varier la constante …)

$$f'(x) = K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)\,e^{A(x)}$$

Donc $f'(x) = a(x)f(x) + b(x) \Leftrightarrow K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x) \Leftrightarrow$
$K'(x)e^{A(x)} = b(x) \Leftrightarrow K'(x) = b(x)e^{-A(x)}$
Il nous faut donc trouver une primitive de la fonction $x \to b(x)e^{-A(x)}$ soit $\int_a^x b(t)e^{-A(t)}\,dt$ avec $a \in I$

Exemple

Considérons l'équation différentielle $y' - 3xy = x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Résolvons d'abord l'équation homogène : $y' - 3xy = 0$
   Nous savons que les solutions de cette équation sont du type $x \to Ke^{A(x)}$ où A désigne une primitive de $x \to 3x$ et K est un réel quelconque. Nous prenons $A(x) = \frac{3x^2}{2}$. Les solutions sont donc de la forme $x \to Ke^{\frac{3x^2}{2}}$
2. Trouvons désormais une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - 3xy = x$
   Appliquons la méthode de la variation de la constante. Cherchons une solution du type
   $$f : x \to K(x)\,e^{\frac{3x^2}{2}}$$
   $f'(x) = K'(x)e^{\frac{3x^2}{2}} + 3xK(x)e^{-\frac{3x^2}{2}}$ donc $f'(x) - 3xf(x) = x \Leftrightarrow$
   $K'(x)e^{\frac{3x^2}{2}} + 3xK(x)e^{\frac{3x^2}{2}} - 3x\,K(x)e^{\frac{3x^2}{2}} = x \Leftrightarrow K'(x)e^{\frac{3x^2}{2}} = x \Leftrightarrow K'(x) = xe^{-\frac{3x^2}{2}}$
   Il vient $K'(x) = \frac{1}{3} * 3x * e^{-\frac{3x^2}{2}}$ soit $K(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-\frac{3x^2}{2}}$. Une solution particulière est donc
   $f(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-\frac{3x^2}{2}}e^{+\frac{3x^2}{2}} = -\frac{1}{3}$. Soit une fonction constante.
3. Une solution générale de l'equation avec second membre s'écrit donc sous la forme :
   $f(x) = K\,e^{\frac{3x^2}{2}} - \frac{1}{3}$

Remarque	Nous avons dans ce chapitre traité les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants parmi les fonctions à valeurs réelles. Cette théorie s'étend sans mal aux fonctions à valeur complexe. Les solutions de l'équation $\boldsymbol{y' - a(x)y = b(x)}$ $où$ b est une fonction à valeur complexe et a une fonction complexe sont du type $y(x) = Ke^{A(x)} + g(x)$ où K est un nombre complexe, A la primitive de a (fonction complexe) et g une fonction complexe solution particulière de l'équation avec second membre. Les preuves sont rigoureusement identiques.