

Résolution d'équations différentielles du second ordre avec second membre		
Contexte	A ce stade nous savons donc résoudre les équations différentielles linéaires, homogènes, à coefficients constants du type $y'' + ay' + by = 0$ (**). Comment résoudre les équations avec second membre du type : $y'' + ay' + by = f$ (*) avec f fonction quelconque dérivable sur un intervalle I ?	
Propriété	Soit g une solution particulière de l'équation (*). Alors toutes les solutions h de l'équation (*) s'écrivent sous la forme $h = g + l$ avec l solution de l'équation homogène (**)	
Preuve		
Soit g une solution particulière de (*). Nous avons $g'' + ag' + bg = f$ Soit h une solution quelconque de (*). Nous avons $h'' + ah' + bh = f$ Il vient $(h - g)'' + a(h - g)' + b(h - g) = 0$ donc $h - g$ est solution de (**). Soit l une solution de (**). Nous avons bien $h - g = l \Rightarrow h = g + l$		
Remarque	Il suffit donc de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre pour en avoir toutes les solutions. Comment trouver une solution particulière ? L'intuition peut nous aider. En effet si $f(x)$ est de la forme $e^{rx}P(x)$ alors l'intuition nous commande de chercher aussi une solution sous la forme $e^{rx}Q(x)$ avec Q polynôme. Néanmoins comment faire dans le cas général ?	
Méthode	Nous allons appliquer la méthode de la variation de la constante. Nous savons que les solutions de l'équation homogène s'écrivent toutes $f = Af_1 + Bf_2$. f_1 et f_2 sont les solutions dites fondamentales. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique. Rappelons que :	
	Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$
	$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$	$f(x) = Ae^{r_0x} + Bxe^{r_0x}$
	$f_1(x) = e^{r_1x}$ $f_2(x) = e^{r_2x}$	$f_1(x) = e^{r_0x}$ $f_2(x) = xe^{r_0x}$
	Si $\Delta < 0$	
	$f(x) = Ae^{rx}\cos(\omega x) + Be^{rx}\sin(\omega x)$ $f_1(x) = e^{rx}\cos(\omega x)$ $f_2(x) = e^{rx}\sin(\omega x)$	
Méthode	Nous allons chercher une solution particulière sous la forme $g(x) = A(x)f_1(x) + B(x)f_2(x)$ $g'(x) = A'(x)f_1(x) + B'(x)f_2(x) + A(x)f_1'(x) + B(x)f_2'(x)$ A ce stade on impose $A'(x)f_1(x) + B'(x)f_2(x) = 0$. On a donc $g'(x) = A(x)f_1'(x) + B(x)f_2'(x)$ $g''(x) = A'(x)f_1'(x) + B'(x)f_2'(x) + A(x)f_1''(x) + B(x)f_2''(x)$ $g''(x) + ag'(x) + bg(x) = f(x)$ $\Leftrightarrow A'(x)f_1'(x) + B'(x)f_2'(x) + A(x)f_1''(x) + B(x)f_2''(x) + a(A(x)f_1'(x) + B(x)f_2'(x)) + b(A(x)f_1(x) + B(x)f_2(x)) = f(x)$ $\Leftrightarrow A(x)(f_1''(x) + af_1'(x) + bf_1(x)) + B(x)(f_2''(x) + af_2'(x) + bf_2(x)) + A'(x)f_1'(x) + B'(x)f_2'(x) = f(x)$ $\Leftrightarrow A'(x)f_1'(x) + B'(x)f_2'(x) = f(x)$ On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases} A'(x)f_1(x) + B'(x)f_2(x) = 0 \\ A'(x)f_1'(x) + B'(x)f_2'(x) = f(x) \end{cases}$	
Exemple	Nous voulons résoudre l'équation $y''(x) + y'(x) - y(x) = e^x$. L'équation homogène est $y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + r - 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$ $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; $r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ Avec $f_1(x) = e^{r_1x}$ et $f_2(x) = e^{r_2x}$ ce qui implique $f_1'(x) = r_1e^{r_1x}$ et $f_2'(x) = r_2e^{r_2x}$ Cherchons une solution particulière g de l'équation avec second membre avec la méthode de la variation de la constante. Posons pour cela $g(x) = A(x)f_1(x) + B(x)f_2(x)$ D'après ce que nous avons vu, A' et B' sont solutions de $\begin{cases} A'(x)f_1(x) + B'(x)f_2(x) = 0 \\ A'(x)f_1'(x) + B'(x)f_2'(x) = f(x) \end{cases}$ Soit $\begin{cases} A'(x)e^{r_1x} + B'(x)e^{r_2x} = 0 \\ A'(x)r_1e^{r_1x} + B'(x)r_2e^{r_2x} = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A'(x) = -B'(x)e^{(r_2-r_1)x} \\ A'(x)r_1e^{r_1x} + B'(x)r_2e^{r_2x} = e^x \end{cases} \Leftrightarrow$	

	$\left\{ \begin{array}{l} A'(x) = -B'(x)e^{(r_2-r_1)x} \\ -B'(x)e^{(r_2-r_1)x}r_1e^{r_1x} + B'(x)r_2e^{r_2x} = e^x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'(x) = -B'(x)e^{(r_2-r_1)x} \\ -B'(x)e^{r_2x}r_1 + B'(x)r_2e^{r_2x} = e^x \end{array} \right\}$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'(x) = -B'(x)e^{(r_2-r_1)x} \\ B'(x)e^{r_2x}[r_2 - r_1] = e^x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'(x) = -B'(x)e^{(r_2-r_1)x} \\ B'(x) = \frac{e^{x(1-r_2)}}{r_2 - r_1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'(x) = -\frac{e^{x(1-r_1)}}{r_2 - r_1} \\ B'(x) = \frac{e^{x(1-r_2)}}{r_2 - r_1} \end{array} \right\}$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(x) = -\frac{e^{x(1-r_1)}}{(r_2 - r_1)(1 - r_1)} + K \\ B(x) = \frac{e^{x(1-r_2)}}{(r_2 - r_1)(1 - r_2)} + L \end{array} \right\}$ Une solution particulière est donc $g(x) = -\frac{e^x}{(r_2-r_1)(1-r_1)} + \frac{e^x}{(r_2-r_1)(1-r_2)} = \frac{e^x}{(r_2-r_1)} \left(\frac{1}{(1-r_2)} - \frac{1}{(1-r_1)} \right) = \frac{e^x}{(1-r_2)(1-r_1)}$ $(1-r_2)(1-r_1) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{4}(9-5) = 1$ Une solution particulière est donc $g(x) = e^x$ (En même temps les calculs ne font que confirmer ici ce qu'un peu d'intuition aurait pu nous amener) Les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont donc de la forme : $f(x) = e^x + Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
Théorème (admis) (Pb de Cauchy)	Soient a, b et c trois réels quelconques. Il n'existe qu'une seule solution f solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiant $f(a) = b$ et $f'(a) = c$
Exemple	Cherchons les solutions f de $y''(x) + y'(x) - y(x) = e^x$ vérifiant $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$ Nous savons que f est de la forme : $f(x) = e^x + Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + A + B = 2 \Rightarrow A + B = 1$ $f'(0) = 2 \Rightarrow 1 + Ar_1 + Br_2 = 2 \Rightarrow Ar_1 + Br_2 = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ Ar_1 + Br_2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 - B \\ (1 - B)r_1 + Br_2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 - B \\ (1 - B)r_1 + Br_2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 - B \\ r_1 + B(r_2 - r_1) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 - B \\ B = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1} \end{array} \right\}$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 - \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 - r_1 - 1 + r_1}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} \\ B = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1} \end{array} \right\}$ $r_2 - r_1 = -\sqrt{5}; 1 - r_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; 1 - r_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ Donc $A = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)}{-\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}$ La solution est donc $f(x) = e^x + \left(\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right)e^{r_1x} + \left(-\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right)e^{r_2x}$