Equations différentielles.

Résolution d'équations différentielles du second ordre sans second membre	
Contexte	Nous allons maintenant nous intéresser à des équations différentielles linéaires du second ordre du type $y'' + ay' + by = f$ avec a et b coefficients constants et f fonction quelconque réelle. Nous ne nous intéresserons dans ce chapitre qu'aux fonctions à valeurs réelles. Comme pour le premier ordre nous allons d'abord concentrer nos efforts sur la résolution de l'équation homogène (sans second membre) puis passer à la résolution de l'équation avec second membre.
Définition	Toute équation différentielle linéaire homogène du second ordre du type $y'' + ay' + by = 0$ admet une équation caractéristique du type $r^2 + ar + b = 0$
Exemple	L'équation $y'' + y + 1 = 0$ admet comme équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$
Remarque	La résolution de cette équation caractéristique va complétement conditionner la résolution de l'équation différentielle.
Théorème	L'équation $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ $(*)$ admet trois types de solution selon le type de solution de l'équation caractéristique. Soit Δ le discriminant de cette équation caractéristique. $\Delta = a^2 - 4b$ 1. Si $\Delta = 0$ l'équation caractéristique admet une solution double r_0. Les solutions de $(*)$ sont de la forme $y(x) = Be^{r_0 x} + Axe^{r_0 x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques. 2. Si $\Delta > 0$ l'équation caractéristique admet deux solutions réelles $r_1$et r_2. Les solutions de $(*)$ sont de la forme $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_1 x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques. 3. Si $\Delta < 0$ l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r_1$et r_2. Les solutions de $(*)$ sont de la forme $y(x) = e^{rx}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$ où A et B sont des constantes réelles quelconques avec $r = -\frac{a}{2}$ et $\omega^2 = -\frac{\Delta}{4}$

Preuve

- Supposons que $\Delta \geq 0$ et que l'équation caractéristique admette une solution réelle r. Cherchons les solutions de $(*)$ sous la forme $f(x) = z(x)e^{rx}$ avec z fonction quelconque deux fois dérivable.
$f'(x) = z'(x)e^{rx} + r\,z(x)e^{rx} = e^{rx}[z'(x) + r\,z(x)]$;
$f''(x) = z''(x)e^{rx} + r\,z'(x)e^{rx} + rz'(x)e^{rx} + r^2 z(x)e^{rx} = e^{rx}[z''(x) + 2r\,z'(x) + r^2 z(x)]$

  f est donc solution de l'équation $(*)$ $ssi\ f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$
$ssi\ e^{rx}[z''(x) + 2r\,z'(x) + r^2 z(x)] + ae^{rx}[z'(x) + r\,z(x)] + bz(x)e^{rx} = 0$
$ssi\ e^{rx}[z''(x) + z'(x)(2r + a) + z(x)(r^2 + ar + b)] = 0$
$ssi\ z''(x) + z'(x)(2r + a) + z(x)(r^2 + ar + b) = 0$

  1. Dans le cas où r est solution double, Il vient $r^2 + ar + b = 0$ et $2r + a = 0$. Donc f est solution de $(*)$ $ssi\ z''(x) = 0$ soit $z(x) = Ax + B$ avec A et B réels quelconques.
  Les solutions de $(*)$ sont donc de la forme
  $\boldsymbol{f(x) = (Ax + B)e^{rx} = Axe^{rx} + Be^{rx}}$ avec A et B réels quelconques.

  2. Dans le cas où r est une des solutions de l'équation caractéristique. Il vient $r^2 + ar + b = 0$. Donc f est solution de $(*)$ $ssi\ z''(x) + z'(x)(2r + a) = 0$, c'est-à-dire si z' est solution de $y' + (2r + a)y = 0$.
  Nous savons résoudre cette équation.
  Il vient $z'(x) = Ke^{-(2r+a)x}$ avec K réel. Cela équivaut à $z(x) = -\frac{K}{2r+a}e^{-(2r+a)x} + L$ avec L réel quelconque
  $$f(x) = z(x)e^{rx} = \left[-\frac{K}{2r+a}e^{-(2r+a)x} + L\right]e^{rx} = -\frac{K}{2r+a}e^{-(r+a)x} + Le^{rx}$$
  Rapelons ici que r est une deux solutions de l'équation caractéristique. Appelons la r_1
  Rappelons aussi que dans l'équation caractéristique $r^2 + ar + b$, $r_1 + r_2 = -a \Rightarrow r_2 = -(r_1 + a)$
  Donc en appelant P la constante $-\frac{K}{2r+a}$, nous pouvons écrire que les solutions de $(*)$ s'écrivent
  $\boldsymbol{f(x) = Pe^{r_2 x} + Le^{r_1 x}}$ avec P et L réels quelconques.

- Supposons maintenant que $\Delta < 0$. Posons r tel que $r = -\frac{a}{2}$. Et cherchons une solution sous la forme $f(x) = z(x)e^{rx}$. Le calcul établi dans le cas $\Delta \geq 0$ nous renseigne sur le fait que f est solution de $(*)$ $ssi\ z''(x) + z'(x)(2r + a) + z(x)(r^2 + ar + b) = 0$. Ici $r = -\frac{a}{2}$, nous sommes donc ramenés à résoudre l'èquation $z''(x) + (r^2 + ar + b)z(x) = 0$.
$r^2 + ar + b = (-\frac{a}{2})^2 + a * \left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b = -\frac{\Delta}{4}$. Or $\Delta < 0$ donc la quantité $-\frac{\Delta}{4}$ est strictement positive. Posons $\omega^2 = -\frac{\Delta}{4}$; f est solution de $(*)$ $ssi\ z''(x) + \omega^2 z(x) = 0$. $(**)$
Il nous reste maintenant à résoudre cette équation.
Pour cela nous allons démontrer un petit lemme bien utile.
Toute fonction z solution de $(**)$ vérifiant $z(0) = z'(0) = 0$ est la fonction nulle.

En effet : $z''(x)+\omega^2 z(x)=0 \Leftrightarrow z''(x)z'(x)+\omega^2 z(x)z'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z'^2(x)+\omega^2 z^2(x)\right)'=0$
$\Leftrightarrow z'^2(x)+\omega^2 z^2(x)$ constant. Or $z(0)=z'(0)=0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\ z'^2(x)+\omega^2 z^2(x)=z'^2(0)+\omega^2 z^2(0)=0$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, z'(x)=z(x)=0$. Le lemme est démontré.

Nous allons maintenant démontrer que les solutions de $(**)$ sont de la forme $z(x)=Acos\,(\omega x)+Bsin(\omega x)$
Remarquons d'abord que si $f(x)=\ Acos\,(\omega x)+Bsin(\omega x)$ alors f solution de $(**)$
$f'(x)=\ -A\omega sin\,(\omega x)+B\omega cos(\omega x)\ \Rightarrow f''(x)=\ -A\omega^2 cos\,(\omega x)-B\omega^2 sin(\omega x)\ \Rightarrow f''(x)+\omega^2 f(x)=0$

Posons maintenant f une solution de $(**)$.
Considérons maintenant la fonction $\varphi: x \to f(x)-f(0)\cos(\,\omega x)-\frac{f'(0)}{\omega}\sin(\,\omega x)$
Nous pouvons remarquer que $\varphi''(x)+\omega^2\varphi(x)=0$ donc φ solution de $(**)$. Mais de plus $\varphi'(0)=\varphi(0)=0$
Nous en déduisons d'après le lemme que φ est la fonction nulle. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=f(0)\cos(\,\omega x)+\frac{f'(0)}{\omega}\sin(\,\omega x)$$

En conclusion les solutions de $(**)$ sont bien de la forme $z(x)=\ Acos\,(\omega x)+Bsin(\omega x)$
Nous avions cherché f solution de $(*)$ sous la forme $z(x)e^{rx}$
Nous en déduisons donc que les solutions de $(*)$ sont de la forme :

$$\boldsymbol{f(x)=e^{rx}(Acos\,(\omega x)+Bsin(\omega x))} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ réels quelconques, } r=-\frac{a}{2},\ \omega=\sqrt{-\frac{\Delta}{4}}$$

Exemple

Résolvons l'équation $y''(x)+y'(x)+y(x)=0\ (***)$

L'équation caractéristique de cette équation est $x^2+x+x=0$. $\Delta=-3$. $r=-\frac{1}{2}.\omega=\sqrt{\frac{3}{4}};\ \ \Delta<0$ donc

Toute solution de $(***)$ s'écrira donc $y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left[Acos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)+Bsin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)\right]$

Remarque

Remarquons d'abord que les solutions de l'équation homogène s'écrivent toutes $f=Af_1+Bf_2$. f_1 et f_2 sont les solutions dites fondamentales.
Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique. Rappelons que :

Si $\Delta>0$	Si $\Delta=0$	Si $\Delta<0$
$f(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_1x}$	$f(x)=Ae^{r_0x}+Bxe^{r_0x}$	$f(x)=Ae^{rx}\cos(\omega x)+Be^{rx}\sin(\omega x)$
$f_1(x)=e^{r_1x}$ $f_2(x)=e^{r_2x}$	$f_1(x)=e^{r_0x}$ $f_2(x)=xe^{r_0x}$	$f_1(x)=e^{rx}\cos(\omega x)$ $f_2(x)=e^{rx}\sin(\omega x)$

Théorème (admis) (Pb de Cauchy)

Soient a, b et c trois réels quelconques. Il n'existe qu'une seule solution f solution d'une équation différentielle linéaire, homogène du second ordre vérifiant $f(a)=b$ et $f'(a)=c$

Exemple

Déterminons les solutions de l'équation $y''(x)+y'(x)+y(x)=0$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=1$
Nous savons que les solutions de l'équation homogène $y''(x)+y'(x)+y(x)=0$ sont du type

$$y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left[Acos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)+Bsin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)\right]$$

$$y(0)=1 \Rightarrow A=1$$

$$y'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left[Acos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)+Bsin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)\right]+e^{-\frac{x}{2}}\left[-A\sqrt{\frac{3}{4}}sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)+B\sqrt{\frac{3}{4}}cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)\right]$$

$$y'(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left[cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)(-\frac{1}{2}A+B\sqrt{\frac{3}{4}})+sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)(-\frac{1}{2}B-A\sqrt{\frac{3}{4}})\right]$$

$$y'(0)=1\ \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}A+B\sqrt{\frac{3}{4}}\right)=1 \Rightarrow -\frac{1}{2}*1+B\sqrt{\frac{3}{4}}=1 \Rightarrow B=\frac{3}{2}*\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{3}$$

La solution particulière de l'équation $y''(x)+y'(x)+y(x)=0$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=1$ est donc

$$y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left[cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)+\sqrt{3}sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)\right]$$