Suites complexes

Définition	Une suite complexe est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$
Exemple	Les suites suivantes $(e^{\frac{in2\pi}{3}})_{n\in\mathbb{N}}$ et $((2n+3i)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites complexes.
Remarques	• Une suite complexe ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ car ces notions n'existent pas dans $\mathbb{C}$ • Une suite complexe ne peut pas être majorée ou minorée dans $\mathbb{C}$ car il n'existe pas de relation d'ordre évidente dans $\mathbb{C}$
Définition	Une suite complexe $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ \lvert U_n\rvert \le n$
Définition	Une suite complexe $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe l si et seulement si la suite réelle $\lvert U_n - l\rvert$ converge vers 0. Cela se traduit avec des quantificateurs par : $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$ tel que $\forall n \ge N\ \lvert U_n - l\rvert \le \varepsilon$
Exemple	La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ tend vers 1. En effet $\lvert U_n - 1\rvert = \left\lvert\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1 + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\rvert = \sqrt{(1-\cos(\frac{2\pi}{n}))^2 + \left(\sin(\frac{2\pi}{n}\right)^2} =$ $\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$ $\lim\limits_{n\to+\propto}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \cos 0 = 1$ Donc $\lim\limits_{n\to+\propto}\lvert U_n - 1\rvert = 0$ Nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\propto} U_n = 1$
Propriété	Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et l un complexe quelconque. Il est équivalent de dire : $\lim\limits_{n\to+\propto} U_n = l$ avec $\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{n\to+\propto} Re(U_n) = Re(l) \\ et \\ \lim\limits_{n\to+\propto} Im(U_n) = Im(l)\end{matrix}\right\}$

Preuve

- Si $\lim\limits_{n\to+\propto} U_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\propto}\lvert U_n - l\rvert = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\propto}\sqrt{\left(Re(l)-Re(U_n)\right)^2 + \left(Im(l)-Im(U_n)\right)^2} = 0$

$$\left(Re(l)-Re(U_n)\right)^2 \le \left(Re(l)-Re(U_n)\right)^2 + \left(Im(l)-Im(U_n)\right)^2$$

  Donc $\lvert Re(l) - Re(U_n)\rvert \le \sqrt{\left(Re(l)-Re(U_n)\right)^2 + \left(Im(l)-Im(U_n)\right)^2} \le \lvert U_n - l\rvert \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\propto}\lvert Re(U_n) - Re(l)\rvert = 0$

  De même $\lvert Im(l) - Im(U_n)\rvert \le \sqrt{\left(Re(l)-Re(U_n)\right)^2 + \left(Im(l)-Im(U_n)\right)^2} \le \lvert U_n - l\rvert \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\propto}\lvert Im(U_n) - Im(l)\rvert = 0$

- Réciproquement il est clair que si $\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{n\to+\propto} Re(U_n) = Re(l) \\ et \\ \lim\limits_{n\to+\propto} Im(U_n) = Im(l)\end{matrix}\right\}$ alors :

$$\lim_{n\to+\propto}\sqrt{\left(Re(l)-Re(U_n)\right)^2 + \left(Im(l)-Im(U_n)\right)^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\propto}\lvert U_n - l\rvert = 0$$