

Théorème des suites adjacentes

Théorème

Soit (u_n) une suite croissante et (v_n) une suite décroissante. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$ alors les deux suites sont convergentes vers une limite commune l . De plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$

Preuve

- Supposons $\exists n_0$ tq $v_{n_0} < u_{n_0}$
 (u_n) est croissante donc $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$
 (v_n) est décroissante donc $\forall n \geq n_0, v_n \leq v_{n_0}$.
 Il vient $\forall n \geq n_0, |u_n - v_n| \geq |u_{n_0} - v_{n_0}|$ Or cette distance $|u_{n_0} - v_{n_0}|$ est strictement positive, cela vient donc en contradiction avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$. Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
- $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq v_0$ (en effet $v_n \leq v_0$) donc (u_n) étant croissante et majorée elle converge vers une limite l_1
 $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geq u_0$ (en effet $u_n \geq u_0$) donc (v_n) étant décroissante et minorée elle converge vers une limite l_2
 Dans le cas où $l_1 \neq l_2$ nous ne pourrions pas avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$ donc $l_1 = l_2 = l$
- (u_n) étant croissante, $\forall n \geq 0, u_n \leq l, (v_n)$ étant décroissante, $\forall n \geq 0, l \leq v_n$
 En effet supposons le contraire pour (u_n) . $\exists n_0$ tel que $u_{n_0} > l$.
 Alors (u_n) étant croissante $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > l$. Cela rentre en contradiction avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
 Le même raisonnement s'applique à (v_n) .
 Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$

Exemple

Montrons que les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 2 \\ \text{puis} \\ a_{n+1} = \frac{2}{b_{n+1}} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{array} \right\} \text{ sont adjacentes et déduisons en leur limite commune.}$$

Nous allons déjà démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$

Nous appellerons cette affirmation P_n

Initialisation : $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{2}$ et $a_1 = \frac{2}{b_1} = \frac{4}{3}$

Donc $0 < a_0 < a_1 < b_1 < b_0$, P_0 est vérifié.

Hérédité : Supposons P_n vérifiée.

$b_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$ donc $0 < a_{n+1} < b_{n+2} < b_{n+1}$

Donc $\frac{2}{b_{n+1}} < \frac{2}{b_{n+2}} < \frac{2}{a_{n+1}} \Rightarrow 0 < a_{n+1} < a_{n+2} < b_{n+1}$

Nous avons donc démontré que $0 < a_{n+1} < a_{n+2}$ et que $b_{n+2} < b_{n+1}$. Il reste à démontrer que :

$$\begin{aligned} b_{n+2} - a_{n+2} &= b_{n+2} - \frac{2}{b_{n+2}} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} - 2 * \frac{2}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} - \frac{4}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \\ &= \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2 - 8}{2(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - 8}{2(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 - 4}{2(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 - 2a_{n+1}b_{n+1}}{2(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{(a_{n+1} - b_{n+1})^2}{2(a_{n+1} + b_{n+1})}. \end{aligned}$$

Or $b_{n+1} - a_{n+1} > 0 \Rightarrow b_{n+2} - a_{n+2} > 0 \Rightarrow b_{n+2} > a_{n+2}$

Nous avons donc démontré P_{n+1} à savoir : $0 < a_{n+1} < a_{n+2} < b_{n+2} < b_{n+1}$

Nous en déduisons la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n)

De plus nous avons vu que $b_{n+2} - a_{n+2} = \frac{(a_{n+1} - b_{n+1})^2}{2(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2(a_{n+1} + b_{n+1})} * (b_{n+1} - a_{n+1})$

Ce qui au rang inférieur s'écrit $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2(a_n + b_n)} * (b_n - a_n)$

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = b_n - a_n$

$0 < \frac{b_n - a_n}{(a_n + b_n)} \leq 1$ donc $|w_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |w_n| \Rightarrow |w_n| \leq \frac{1}{2^n} |w_0| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

Nous avons donc :

- La croissance de (a_n)
- La décroissance de (b_n)
- Le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$

Nous en déduisons que ces deux suites sont adjacentes. Elles convergent vers une limite commune l .

De l'expression $b_{n+1}a_{n+1} = 2$, nous déduisons en passant à la limite que $l^2 = 2 \Rightarrow l = \sqrt{2}$.

($l = -\sqrt{2}$ est inenvisageable car la suite est positive)

Ces deux suites sont donc des méthodes d'approche de $\sqrt{2}$.

