Suites arithmétiques, géométriques

Suites arithmétiques	
Définition	Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique si et seulement si elle est définie par un premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b complexes quelconques.
Exemple	La suite (u_n) définie par $\begin{Bmatrix} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{Bmatrix}$ est une suite arithmético-géométrique
Remarque	Dans le cas où $a = 1$ nous avons $u_{n+1} = u_n + b$. (u_n) est alors une suite arithmétique. Ce cas est connu et a déjà été étudié par ailleurs. Nous ne considérons donc pas le cas où $a = 1$

Méthode

L'étude d'une suite (u_n) arithmético-géométrique définie suivant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ se fait en plusieurs étapes :

- Recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = au_n + b$
  Soit (v_n) cette suite. Nous cherchons donc (v_n)tel que $v_n = av_n + b \Longrightarrow v_n(1-a) = b$
  Or $a \neq 1$ donc $v_n = \frac{b}{1-a}$
- Recherche d'une suite géométrique :
  Nous savons que $\begin{Bmatrix} u_{n+1} = au_n + b \\ v_{n+1} = av_n + b \end{Bmatrix}$. Retranchons la deuxième égalité à la première. Il vient $u_{n+1} - v_{n+1} = a(u_n - v_n)$. La suite $(u_n - v_n)$ est donc une suite géométrique de raison a
- $(u_n - v_n)$ étant une suite géométrique de raison a, il est aisé de déterminer le terme de rang n en fonction du premier terme. $u_n - v_n = a^n(u_0 - v_0) \Longrightarrow u_n = v_n + a^n(u_0 - v_0) = \frac{b}{1-a} + a^n(u_0 - v_0)$

Exemple	Etudions la suite arithmético-géométrique définie par $\begin{Bmatrix} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{Bmatrix}$ • Recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence : $$v_n = \frac{1}{2}v_n - 3 \Longrightarrow \frac{1}{2}v_n = -3 \Longrightarrow v_n = -6$$ • Recherche d'une suite géométrique : $u_{n+1} - (-6) = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6)$ donc $u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}(u_n + 6)$ • Exprimons le terme de rang n : $(u_n + 6)$ étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ nous avons $u_n + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 + 6) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \Longrightarrow$ $u_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$