Caractérisation séquentielle de propriétés topologiques

Nous allons ici reprendre certaines notions topologiques et regarder les intersections possibles avec le monde des suites.

Théorème

Nous allons ici recaractériser les bornes sup et inf d'un ensemble à l'aide de suites.
Soit X un ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- M est dit sup X ssi M est un majorant de X et si en plus il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M$
- m est dit inf X ssi m est un minorant de X et si en plus il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = m$

Preuve

$M = \sup X$ donc M est le plus petit des majorants de X .

Nous allons construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : $\forall n > 0 \ M - \frac{1}{n} < M$ donc $M - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de X . Cela signifie qu'il existe un élément de X que nous nommerons x_n tel que $M - \frac{1}{n} \leq x_n \leq M$

D'après la construction de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et grâce au théorème des gendarmes nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M$

Réciproquement : Supposons qu'il existe une suite d'éléments de X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M$ avec M majorant de X .

Supposons que M ne soit pas le plus petit des majorants. Cela signifierait qu'il existe un majorant M' tel que $M' < M$

Nous aurions $\forall n \ x_n \leq M'$ Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M$ donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n - M| < \varepsilon$.

En prenant $\varepsilon = \frac{|M - M'|}{2}$ nous aboutissons à une contradiction puisque $\forall n \geq N \ M' < x_n \leq M$ avec M' majorant de X

Bien entendu nous avons la démonstration symétrique pour m minorant de X et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = m$

Exercice (Exemple)

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^* \ 0 \leq \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$
- Soit $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$. Donner $\sup_{n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*} (A)$ et $\inf_{n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*} (A)$

Corrigé

- m et n étant strictement positifs $0 \leq \frac{mn}{(m+n)^2}$ est évident.

$$mn = \frac{1}{4} [(m+n)^2 - (m-n)^2] \text{ Donc } \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{(m+n)^2}{(m+n)^2} - \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} \right] = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} \right] = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{[(m-n)]^2}{[(m+n)]^2} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{[(m-n)]^2}{[(m+n)]^2}$$

Un carré étant toujours positif nous avons donc $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$

- Posons $m = 1$ La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \left\{ \frac{n}{(1+n)^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une suite de A . Cette suite tend vers 0. Nous en déduisons que $0 = \inf_{n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*} (A)$

Posons $m = n$ La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \left\{ \frac{n^2}{(2n)^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une suite de A . Cette suite tend vers $1/4$.

Nous en déduisons que $\frac{1}{4} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*} (A)$

Théorème

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ alors x est adhérent à A ssi il existe une suite d'éléments de A ayant pour limite x .

Preuve

- Supposons x adhérent à A . Alors tout voisinage de x a une intersection non nulle avec A . Construisons un voisinage de x de la forme $\left] x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n} \right[$. $\forall n, \exists x_n \in \left] x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n} \right[\cap A$. Cette suite (x_n) d'éléments de A converge vers x .

- Supposons qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x . Cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n - x| < \varepsilon$$

Soit V un voisinage de x . Il existe un réel $\alpha > 0$ tq $\left] x - \alpha; x + \alpha \right[\subset V$

$$\text{Choisissons } \varepsilon = \frac{\alpha}{2}; \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n - x| < \frac{\alpha}{2}$$

Donc l'intervalle $\left] x - \alpha; x + \alpha \right[$ contient tous les éléments de la suite (x_n) pour n assez grand ce qui implique que l'intersection entre $\left] x - \alpha; x + \alpha \right[$ et A est non nulle.

Corrolaire :

A un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel x est limite d'une suite d'éléments de A

Preuve

Nous avons défini la densité de A dans $\mathbb{R}$ par le fait que tout réel soit adhérent à A . Or le théorème précédent nous renseigne sur le fait que tout réel est adhérent à A ssi il est limite d'une suite d'éléments de A .

Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$

Il n'a pas que $\mathbb{Q}$ qui soit dense dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{D}$, ensemble des décimaux est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$

Théorème :

L'ensemble $\mathbb{D}$ ensemble des nombres décimaux soit des nombres qui peuvent s'écrire $\frac{p}{10^n}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$) est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve

Nous allons pour cela démontrer que tout réel est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{D}$

Soit x un réel quelconque.

Construisons pour cela deux suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = \frac{E(10^n * x)}{10^n}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$

Nous avons immédiatement : $\forall n, b_n$ et a_n sont des décimaux avec au plus n chiffres après la virgule.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{E(10^{n+1} * x)}{10^{n+1}} - \frac{E(10^n * x)}{10^n} = \frac{E(10^{n+1} * x) - 10E(10^n * x)}{10^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} E(10^n * x) &\leq 10^n * x \\ \Rightarrow 10E(10^n * x) &\leq 10^{n+1} * x \end{aligned}$$

$$10E(10^n * x) \text{ est un entier donc } E(10^{n+1} * x) \geq 10E(10^n * x)$$

$a_{n+1} - a_n \geq 0$ donc la suite (a_n) est croissante.

$10^n a_n = E(10^n * x)$ et $10^n * b_n = 10^n a_n + 1 = E(10^n * x) + 1$ donc $10^n a_n \leq 10^n * x \leq 10^n * b_n$

Multiplions par 10 cette inégalité : $10^{n+1} a_n \leq 10^{n+1} * x \leq 10^{n+1} * b_n$ et mémorisons la.

En passant l'égalité $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ au rang $n + 1$ il vient : $b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}$

$$\Rightarrow 10^{n+1} b_{n+1} = 10^{n+1} a_{n+1} + 1$$

$$\Rightarrow 10^{n+1} b_{n+1} = 10^{n+1} \frac{E(10^{n+1} * x)}{10^{n+1}} + 1$$

$$\Rightarrow 10^{n+1} b_{n+1} = E(10^{n+1} * x) + 1$$

Or nous avons vu que $10^{n+1} * x \leq 10^{n+1} * b_n$. $10^{n+1} * b_n$ est un entier donc $E(10^{n+1} * x) + 1 \leq 10^{n+1} * b_n$

Ce qui implique $10^{n+1} b_{n+1} \leq 10^{n+1} * b_n \Rightarrow b_{n+1} \leq b_n$

Nous avons donc démontré que la suite (b_n) est décroissante.

Nous avons donc (a_n) croissante, (b_n) décroissante. $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$

(a_n) et (b_n) sont donc deux suites adjacentes de limite commune l .

Nous savons que : $10^n a_n = E(10^n * x)$ et $10^n b_n = 10^n a_n + 1 = E(10^n * x) + 1$

Donc $10^n a_n \leq 10^n * x \leq 10^n b_n \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n$ En passant à la limite il vient $l \leq x \leq l$

Donc x est bien limite commune des suites (a_n) et (b_n) qui sont des suites de décimaux.