Suites arithmétiques, géométriques

Suites arithmétiques

Définition	**Suite arithmétique**	Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = u_n + r$ $u_0 \xrightarrow[+r]{} u_1 \xrightarrow[+r]{} u_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow u_n \xrightarrow[+r]{} u_{n+1}$

Exemple	La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$. Les premiers termes de (u_n) valent : $u_0 = -2;\ u_1 = 1;\ u_2 = 4;\ u_3 = 7;\ u_4 = 10$ ....
Remarque	Pour démontrer qu'une suite est arithmétique il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r.
Propriété	Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r • Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + r * n$ • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ $u_n = u_p + r * (n - p)$

Démonstration

$u_{p+1} = u_p + r$;
$u_{p+2} = u_{p+1} + r = u_p + r + r = u_p + 2r$
$u_{p+3} = u_{p+2} + r = u_p + 2r + r = u_p + 3r$
……
$u_n = u_{n-1} + r = u_p + (n - p - 1)r + r = u_p + (n - p)r$

Cas particuliers :
$p = 0$; $u_n = u_0 + nr$
$p = 1$; $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Propriété	**Sens de variation**	• Si $r > 0$ (u_n) est strictement croissante • Si $r < 0$ (u_n) est strictement décroissante • Si $r = 0$ (u_n) est constante

Démonstration

$$u_{n+1} - u_n = r \text{ donc si } \begin{Bmatrix} r > 0\ (u_n) \text{est strictement croissante} \\ r < 0\ (u_n) \text{est strictement décroissante} \\ r = 0\ (u_n) \text{ est constante} \end{Bmatrix}$$

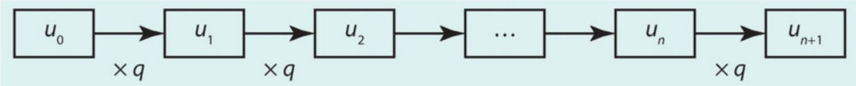
Propriété	Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r de premier terme u_0 • Si $r > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ • Si $r = 0$ La suite est constante • Si $r < 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

- Si $r > 0$ la suite est strictement croissante.
  $u_n = u_0 + nr$ donc la suite n'est pas majorée. Nous en déduisons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r = 0$ La suite est constante. Ce point est trivial.
- Si $r < 0$ la suite est strictement décroissante.
  $u_n = u_0 + nr$ donc la suite n'est pas minorée. Nous en déduisons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Remarque	Dans la démonstration ci dessus nous avons fait partir la suite à u_0 mais nous aurions pu la faire partir à n'importe quel terme.

Suites géométriques

Définition	**Suite géométrique**	Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = q * u_n$ 
Exemple		La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$ est la suite géométrique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$. Les premiers termes de (u_n) valent : $u_0 = 0{,}5$; $u_1 = 1;\ u_2 = 2;\ u_3 = 4;\ u_4 = 8$ ….
Remarque		Pour démontrer qu'une suite est géométrique il suffit de montrer si les termes sont non nuls que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à une constante q.
Propriété		Soit (u_n) une suite géométrique de raison q • Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 * q^n$ • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ $u_n = u_p * q^{n-p}$

Démonstration

$u_{p+1} = qu_p$;
$u_{p+2} = q *\ u_{p+1} = q * qu_p = q^2 u_p$
$u_{p+3} = q *\ u_{p+2} = q *\ q^2 u_p = q^3 u_p$
……
$u_n = q * u_{n-1} =\ q * q^{n-p-1}\, u_p = q^{n-p}\, u_p$

Cas particuliers :
$p = 0$; $u_n = q^n u_0$
$p = 1$; $u_n = q^{n-1} u_1$

Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$

Si $q > 1$	Si $0\ <\ q\ <\ 1$	Si $q = 0$ ou $q = 1$	Si $q < 0$
Si $u_0 > 0$ alors (u_n) strictement croissante Si $u_0 <\ 0$ alors (u_n) strictement décroissante	Si $u_0 > 0$ alors (u_n) strictement décroissante Si $u_0 < 0$ alors (u_n) strictement croissante	(u_n) constante	(u_n) n'est pas monotone

Démonstration

$$u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = (q-1)u_n$$

- Si $q = 0$ la suite est constante à 0
  Si $q = 1$ la suite est constante.
- Si $q < 0$ les termes de la suite changent de signe l'un après l'autre. La suite (u_n) n'est pas monotone

- Si $q > 1$
  Si $u_0 > 0$ tous les termes de la suites sont > 0
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$
  $u_{n+1} >\ u_n$ La suite est strictement croissante.
  Si $u_0 < 0$ tous les termes de la suites sont $\ < 0$
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} -\ u_n < 0$
  $u_{n+1} <\ u_n$ La suite est strictement décroissante.
- Si $0\ <\ q\ <\ 1$
  Si $u_0 > 0$ tous les termes de la suites sont > 0
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n < 0$
  $u_{n+1} <\ u_n$ La suite est strictement décroissante.
  Si $u_0 < 0$ tous les termes de la suites sont $\ < 0$
  $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$ Donc $u_{n+1} -\ u_n > 0$
  $u_{n+1} > u_n$La suite est strictement croissante.

<table>
<tr><td rowspan="3">Propriété</td><td colspan="4">Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$</td></tr>
<tr><td>Si $q > 1$</td><td>Si $-1 < q < 1$</td><td>Si $q = 0$ ou $q = 1$</td><td>Si $q \leq -1$</td></tr>
<tr><td>Si $u_0 > 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Si $u_0 < 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$</td><td>$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$</td><td>$(u_n)$ constante</td><td>(u_n) n'admet pas de limite</td></tr>
</table>

Preuve

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ la suite est strictement croissante. $u_n = u_0 * q^n$ donc la suite n'est pas majorée. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ la suite est strictement décroissante. $u_n = u_0 * q^n$ donc la suite n'est pas minorée. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- Si $-1 < q < 1$ Considérons $v_n = |u_n|$, $v_{n+1} = q'v_n$ avec $0 < q' < 1$ et $v_0 > 0$. (v_n) est donc strictement décroissante et minorée par 0. Donc elle converge. Si elle convergeait vers une limite $l > 0$ cela supposerait qu'elle soit minorée par l. C'est impossible ($v_n = q'^n v_0$ avec $0 < q' < 1$ et $v_0 > 0$). Donc elle converge vers 0 donc (u_n) converge aussi vers 0
- Si $q = 0$ ou $q = 1$. Evident
- Si $q \leq -1$ Admis

Sommes

Propriété	Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration

Soit $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots n$. Ecrivons S_n d'abord par ordre croissant, puis par ordre décroissant

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots 2 + 1$$

Additionnons ensuite ces deux lignes il vient :
$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots (n+1)$
Le nombre de $(n+1)$ est égal à n donc

$$2S_n = n(n+1) \to S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété	Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geq 1$ on a $1 + q + q^2 + \cdots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration

Soit $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots q^n$; $qS_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$

$$S_n - qS_n = (1 + q + q^2 + \cdots q^n) - (q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)} \ (q \neq 1)$$