Suites et IAF	
Théorème	Soit f une fonction K −lipschitzienne (avec $0 \leq K < 1$) laissant stable un intervalle I. Soit (u_n) une suite définie par $\begin{Bmatrix} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{Bmatrix}$ admettant un point fixe $l \in I$ Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et la vitesse de convergence est donnée par la suite $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Preuve

f est K −lipschitzienne donc $|f(u_n) - f(l)| \leq K|u_n - l| \Rightarrow |u_{n+1} - l| \leq K|u_n - l|$

$$|u_n - l| \leq K|u_{n-1} - l| \leq K^2|u_{n-2} - l| \leq \ldots \leq K^n|u_0 - l|$$

$\lim_{n\to+\infty} K^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}|u_n - l| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l.$

L'écart entre u_n et l étant majoré par $K^n|u_0 - l|$. La vitesse de convergence de (u_n) sera donc majorée par la vitesse de convergence de $(K^n|u_0 - l|)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque	Nous n'avons pas fait appel à l'inégalité des accroissements finis. Pourtant cette inégalité apparaît dans l'entête de ce document. En quoi va-t-elle nous être utile ? Elle est tout simplement utile pour montrer que la fonction f est K −lipschitzienne. Rappel : Si f est dérivable sur un intervalle I et que $\forall x \in I, \lvert f'(x)\rvert \leq M$ alors $\forall (x,y) \in I^2, \lvert f(x) - f(y)\rvert \leq M\lvert x - y\rvert$
Exemple	Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{Bmatrix} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{Bmatrix}$ avec f: $\begin{Bmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{1+x} \end{Bmatrix}$. Etudions l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Résolution

- Remarquons tout d'abord que l'intervalle $\mathbb{R}^+$ est stable par f. Nous en déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. (si $x \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$)

- Remarquons maintenant de manière plus fine que l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ est stable par f
$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \geq \frac{2}{3} \geq f(x) \geq \frac{1}{2}$$

- $u_1 = \frac{1}{2}$ Donc $\forall n \geq 1, u_n \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$. Il vient $\forall x \in \mathbb{R}^+ \,|\, f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2}$

  Si $x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ alors $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{9}{4} \leq (1+x)^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{4}{9} \geq \frac{1}{(1+x)^2} \geq \frac{1}{4}$
  Donc $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right], |\, f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

  L'inégalité des accroissements finis nous dit donc que f est $\frac{4}{9}$ −lipschitzienne sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

- f admet-elle des points fixes ?
$$f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{1+x} = x \Rightarrow 1 = x(x+1) \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

  Ce polynôme admet un discriminant $\Delta = 5$
  Les racines du polynôme sont donc $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
  $x_2 \leq 0$ et $x_1 \approx 0{,}618$ donc $x_1 \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$. Il est immédiat de vérifier que réciproquement $f(x_1) = x_1$
  Posons $l = x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

- $\forall n \geq 1, |f(u_n) - f(l)| \leq \frac{4}{9}|u_n - l| \Rightarrow |u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$
  $|u_2 - l| \leq \frac{4}{9}|u_1 - l| \Rightarrow |u_3 - l| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |u_1 - l| \Rightarrow \ldots |u_n - l| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - l|$
  $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - l| = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - l| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

  La suite est bien convergente et converge vers $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$