## Suites réelles. Généralités

| | |
|---|---|
| **Définition** | • On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque :<br>$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ \lvert U_n - l\rvert < \varepsilon$<br>On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$<br>• On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque :<br>$\forall M > 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ U_n \geq M$<br>On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$<br>• On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $-\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque :<br>$\forall M < 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ U_n \leq M$<br>On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ |
| **Théorème** | Unicité de la limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors cette limite est unique. |

### Preuve

Supposons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites $l_1$ et $l_2$ avec $l_1 \neq l_2$

- Si $l_1 = +\propto$ alors $\forall M > 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ U_n \geq M$. Cette affirmation contredit le fait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse tendre vers $-\propto$ ou un réel $l$
- Si $l_1 = -\propto$ alors $\forall M < 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ U_n \leq M$. Cette affirmation contredit le fait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse tendre vers $+\propto$ ou un réel $l$
- Si $l_1 = l$ réel alors $\forall\varepsilon > 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ \lvert U_n - l\rvert < \varepsilon$. Cette affirmation contredit le fait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse tendre vers $\mp\propto$ . Néanmoins $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pourrait tendre vers une autre limite réelle $l'$ avec $l' \neq l$
  Soit $d = \lvert l - l'\rvert$.
  $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \implies \forall\varepsilon > 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ \lvert U_n - l\rvert < \varepsilon$. Choisissons $\varepsilon = \frac{d}{2}$ $\exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ \lvert U_n - l\rvert < \frac{d}{2}$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l' \implies \forall\varepsilon > 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ \lvert U_n - l'\rvert < \varepsilon$. Choisissons $\varepsilon = \frac{d}{2}$ $\exists N_1\ tel\ que\ \forall n \geq N_1\ \lvert U_n - l'\rvert < \frac{d}{2}$
  Choisissons maintenant $n \geq \sup\,(N_0, N_1)$ nous avons $\lvert U_n - l\rvert < \frac{d}{2}$ et $\lvert U_n - l'\rvert < \frac{d}{2}$
  C'est impossible. $U_n$ ne peut pas être à moins de $\frac{d}{2}$ de $l$ et de $l'$ simultanément. Nous sommes donc arrivés vers une contradiction. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas tendre vers une autre limite $l'$.

| | |
|---|---|
| **Définition** | Une suite est dite convergente lorsqu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire elle est divergente. |
| **Théorème** | Toute suite convergente est bornée |

### Preuve

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. On suppose $l$ sa limite. $\implies \forall\varepsilon > 0, \exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ \lvert U_n - l\rvert < \varepsilon$
En prenant $\varepsilon = \left\lvert\frac{l}{2}\right\rvert$ on peut écrire $\exists N_0\ tel\ que\ \forall n \geq N_0\ \lvert U_n - l\rvert < \left\lvert\frac{l}{2}\right\rvert$. Donc $\forall n \geq N_0\ \lvert U_n\rvert \leq \lvert l\rvert + \frac{\lvert l\rvert}{2} \leq \frac{3}{2}\lvert l\rvert$
Il vient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée.