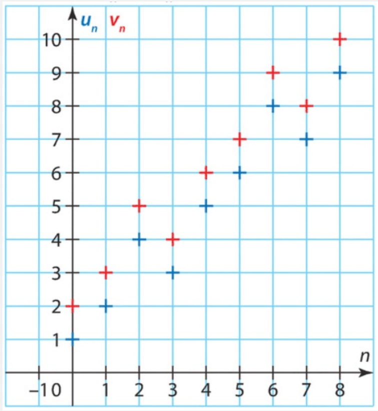
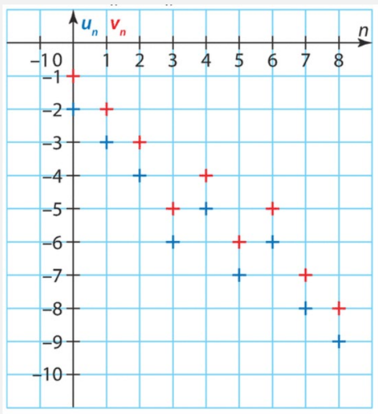
Théorèmes de comparaison pour les suites

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. A partir d'un certain rang $n_0, v_n \geq u_n$

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
	

Preuve

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\forall M > 0\ \exists N_1\ tq\ \forall n \geq N_1\ u_n \geq M$
Or à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$ cela implique :
$\exists N_2\ tq\ \forall n \geq N_2\ v_n \geq u_n$
Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$ Nous avons $v_n \geq u_n \geq M$
Nous avons bien :
donc $\forall M > 0\ \exists N_3 = \max(N_1, N_2)\ tq\ \forall n \geq N_3\ v_n \geq M$
ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donc $\forall M > 0\ \exists N_1\ tq\ \forall n \geq N_1\ v_n \leq -M$
Or à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ cela implique :
$\exists N_2\ tq\ \forall n \geq N_2\ u_n \leq v_n$
Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$ Nous avons $u_n \leq v_n \leq -M$
Nous avons bien :
donc $\forall M > 0\ \exists N_3 = \max(N_1, N_2)\ tq\ \forall n \geq N_3\ u_n \leq -M$
ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Exemple

- On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + n^2$. Soit v_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n$. A partir de $n = 0$ nous avons $u_n \geq v_n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n - \frac{1}{n}$. Soit v_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -n$. A partir de $n = 1$ nous avons $u_n \leq v_n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Propriété

Soit une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$ (q nombre réel). Dans le cas où

- $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$
- $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
- $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- $q < -1$ alors (u_n) n'admet pas de limite.

Preuve

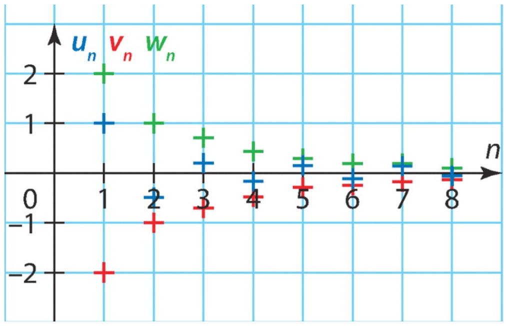
- si $q > 1$ alors $\forall M > 0\ \exists N\ tq\ \forall n \geq N\ u_n \geq M$
  En effet $q^n \geq M \Rightarrow lnq^n \geq \ln M \Rightarrow nlnq \geq lnM \Rightarrow n \geq \frac{\ln M}{lnq}$
- si $q = 1$ c'est évident
- $-1 < q < 1$ alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ tq\ \forall n \geq N\ |u_n| \leq \varepsilon$
  En effet $|q^n| \leq \varepsilon \Rightarrow \ln(|q^n|) \leq \ln(\varepsilon) \Rightarrow n\ln(|q|) \leq \ln(\varepsilon) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}$
- Si $q < -1$ c'est aussi évident

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ (avec l nombre réel) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Preuve

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ donc :
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 tq\ \forall n \geq N_1\ |v_n - l| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq v_n - l \leq \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 tq\ \forall n \geq N_2\ |w_n - l| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq w_n - l \leq \varepsilon$
Fixons ε . Nous savons que $\exists N_3$ tq $\forall n \geq N_3\ v_n - l \leq u_n - l \leq w_n - l$
Donc pour $n \geq \max(N_1, N_2, N_3)$ nous avons $-\varepsilon \leq v_n - l \leq u_n - l \leq w_n - l \leq \varepsilon$ ce qui implique $|u_n - l| < \varepsilon$
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

<table>
<tr><td>Exemple1</td><td colspan="2">Soit (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{2\cos n}{n}$ Nous avons -2 $\leq -2\cos n \leq 2 \Longrightarrow -\frac{2}{n} \leq -\frac{2}{n}\cos n \leq -\frac{2}{n} \Longrightarrow$
$$1 - \frac{2}{n} \leq 1 - \frac{2}{n}\cos n \leq 1 + \frac{2}{n}$$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n}\cos n = 1$
Nous pouvons en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n}\cos n = 1$</td></tr>
<tr><td>Exemple2</td><td>Sur l'exemple ci-contre on a représente (u_n) en bleu, (v_n) en rouge, (w_n) en vert.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td colspan="2">C'est une application du théorème des gendarmes. Soit l un réel et $(u_n), (v_n)$ deux suites telles que à partir d'un certain rang $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Preuve</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nous savons que : $\exists N\ tq\ \forall n \geq N\ 0 \leq |u_n - l| \leq v_n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc une simple application du théorème des gendarmes pour la suite $|u_n - l|$ encadrée par les suites 0 et v_n nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">Soit (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{\cos(n^2)}{n}$
Nous avons $u_n - 1 = \frac{\cos(n^2)}{n} \Longrightarrow |u_n - 1| = \left|\frac{\cos(n^2)}{n}\right| \Longrightarrow |u_n - 1| \leq \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$</td></tr>
</table>