Passage à la limite.	
Théorème	Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$, convergeant vers l et l' deux nombres réels. Si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$

Preuve

Raisonnement par l'absurde : Supposons $l' - l < 0$. Posons $d = |l' - l|$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ donc $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 > 0$ tq $\forall n \geq N_1\ |u_n - l| < \varepsilon_1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ donc $\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists N_2 > 0$ tq $\forall n \geq N_2\ |v_n - l'| < \varepsilon_2$

Prenons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{d}{4}$ $\forall n \geq \max(N_1, N_2)\ |u_n - l| < \frac{d}{4}$; $\forall n \geq N_2 |v_n - l'| < \frac{d}{4}$

$$u_n - v_n = u_n - l + l - l' + l' - v_n$$

$u_n - l \geq -\frac{d}{4}$; $l' - v_n \geq -\frac{d}{4}$ Donc $u_n - v_n \geq\ l - l' - \frac{d}{2}$

Nous avons $l - l' = d$ donc $u_n - v_n \geq \frac{d}{2}$ Cela rentre en contradiction avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Nous sommes donc arrivés à une contradiction. Nous en concluons que $l' \geq l$

Remarque	Ce théorème est souvent utilisé avec une des deux suites qui est constante. Exemple : Soit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Nous avons $\forall n > 1, u_n > 1$. Nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$. Nous en déduisons que $e \geq 1$
Propriété	Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l > 0$ alors le terme général u_n sera strictement positif à partir d'un certain rang.

Preuve

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ donc $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 > 0$ tq $\forall n \geq N_1\ |u_n - l| < \varepsilon_1$. Posons $\varepsilon_1 = \frac{l}{2}$

Il vient $\exists N_1 > 0$ tq $\forall n \geq N_1\ |u_n - l| < \frac{l}{2}\ (l > 0) \Rightarrow -\frac{l}{2} \leq u_n - l \leq \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} \leq u_n \leq \frac{3l}{2}$

Si pour tous les n plus grands que N_1 nous avons $0 < \frac{l}{2} \leq u_n$, nous pouvons en déduire que les u_n sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Exemple	Soit (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{3}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Nous pouvons donc en déduire que à partir d'un certain rang $u_n > 0$