

Cas complexe	
Définition	Une suite complexe (u_n) est dite linéaire récurrente d'ordre 2 si et seulement si elle est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec a et b complexes
Exemple	La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 ; u_1 = 3 + i \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + iu_n \end{cases}$ est une suite complexe linéaire récurrente d'ordre 2.
Définition	L'équation caractéristique d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2 du type : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est : $r^2 = ar + b$
Théorème	Soit (u_n) une suite linéaire complexe récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 = ar + b$ - Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 alors : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ - Si l'équation caractéristique admet une solution double r_0 alors : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$
Preuve	
La preuve s'établit par récurrence.	
Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2	Si l'équation caractéristique admet une solution double r_0
Soit $P(n)$ la proposition : $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ $P(0)$ s'écrit $u_0 = \lambda + \mu$ $P(1)$ s'écrit $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$ Nous devons donc résoudre le système suivant d'inconnues λ et μ : $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$ $\mu = u_0 - \lambda$ $u_1 = \lambda r_1 + (u_0 - \lambda) r_2$ $u_1 - u_0 r_2 = \lambda(r_1 - r_2)$. $r_1 - r_2 \neq 0$ car r_1 et r_2 distinctes. Donc $\lambda = \frac{u_1 - u_0 r_2}{r_1 - r_2}$ et $\mu = u_0 - \lambda = u_0 - \frac{u_1 - u_0 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{u_0 r_1 - u_1}{r_1 - r_2}$ Donc avec ces deux valeurs $P(0)$ et $P(1)$ sont vérifiées. Supposons que avec ces deux valeurs $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vérifiés et montrons qu'alors c'est aussi le cas pour $P(n+2)$ Si $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ Alors $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ $= a \lambda r_1^{n+1} + a \mu r_2^{n+1} + b \lambda r_1^n + b \mu r_2^n$ $= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b)$ Or $r_1^2 = a r_1 + b$ et $r_2^2 = a r_2 + b$ Donc $u_{n+2} = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}$ $P(n+2)$ est donc aussi vérifiée. Nous avons donc bien : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$	Soit $P(n)$ la proposition : $u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$ $P(0)$ s'écrit $u_0 = \lambda$ $P(1)$ s'écrit $u_1 = \lambda r_0 + \mu r_0$ Nous devons donc résoudre le système suivant d'inconnues λ et μ : $\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = \lambda r_0 + \mu r_0 \end{cases}$ $\mu r_0 = u_1 - \lambda r_0 = u_1 - u_0 r_0$. $r_0 \neq 0$ (cela impliquerait a et b nuls) Donc $\lambda = u_0$ et $\mu = \frac{u_1 - u_0 r_0}{r_0}$ Donc avec ces deux valeurs $P(0)$ et $P(1)$ sont vérifiés. Supposons que avec ces deux valeurs $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vérifiés et montrons qu'alors c'est aussi le cas pour $P(n+2)$ Si $u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_0^{n+1} + \mu(n+1) r_0^{n+1}$ Alors $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ $= a \lambda r_0^{n+1} + a \mu(n+1) r_0^{n+1} + b \lambda r_0^n + b \mu n r_0^n$ $= \lambda r_0^n (a r_0 + b) + a \mu n r_0^{n+1} + a \mu r_0^{n+1} + b \mu n r_0^n$ $= \lambda r_0^n (a r_0 + b) + \mu n r_0^n (a r_0 + b) + a \mu r_0^{n+1}$ Or $a r_0 + b = r_0^2$ et $r_0 = \frac{a}{2}$ (r_0 racine de $2r - a = 0$) Donc $u_{n+2} = \lambda r_0^{n+2} + \mu n r_0^n * r_0^2 + 2 \mu r_0 r_0^{n+1}$ $u_{n+2} = \lambda r_0^{n+2} + \mu(n+2) r_0^{n+2}$ $P(n+2)$ est donc aussi vérifiée. Nous avons donc bien : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$

Cas réel	
Théorème	Soit (u_n) une suite linéaire réelle récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 = ar + b$ • Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ • Si l'équation caractéristique admet une solution double r_0 alors : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$ • Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ alors : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$
Preuve	
• Dans les deux premiers cas, la preuve est la même que dans le cas complexe. Nous ne la référons donc pas. • Dans le troisième cas nous savons grâce au cas complexe que : $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu \bar{r}_1^n$ $u_n = \lambda \rho^n e^{in\theta} + \mu \rho^n e^{-in\theta}$	
Trouvons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que : $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda \rho e^{i\theta} + \mu \rho e^{-i\theta} \end{cases}$ $\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda \rho e^{i\theta} + \mu \rho e^{-i\theta} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \rho e^{i\theta} u_0 = \lambda \rho e^{i\theta} + \mu \rho e^{i\theta} \\ u_1 = \lambda \rho e^{i\theta} + \mu \rho e^{-i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}) = \rho e^{i\theta} u_0 - u_1 \\ u_1 = \lambda \rho e^{i\theta} + \mu \rho e^{-i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{\rho e^{i\theta} u_0 - u_1}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \\ \lambda = u_0 \rho e^{-i\theta} - u_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{\rho e^{i\theta} u_0 - u_1}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \\ \lambda = u_0 - \frac{\rho e^{i\theta} u_0 - u_1}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{\rho e^{i\theta} u_0 - u_1}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \\ \lambda = \frac{u_0 \rho e^{i\theta} - u_0 \rho e^{-i\theta} - \rho e^{i\theta} u_0 + u_1}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{\rho e^{i\theta} u_0 - u_1}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \\ \lambda = \frac{u_1 - u_0 \rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \end{cases} \end{aligned}$	
Remarque : $\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta} = -2i \operatorname{Im}(r_1)$. Si $\operatorname{Im}(r_1)$ valait 0 cela signifierait que r_1 serait réel. Or cela est impossible par hypothèse. Nous pouvons donc bien diviser par $\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}$	
De l'expression $\begin{cases} \mu = \frac{\rho e^{i\theta} u_0 - u_1}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \\ \lambda = \frac{u_1 - u_0 \rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta}} \end{cases}$ nous en déduisons que $\lambda = \bar{\mu}$	
Nous avons donc $u_n = \lambda r_1^n + \bar{\lambda} \bar{r}_1^n = \lambda \rho^n e^{in\theta} + \bar{\lambda} \rho^n e^{-in\theta} = \lambda \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + \bar{\lambda} \rho^n (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))$ $u_n = \cos(n\theta) \rho^n (\lambda + \bar{\lambda}) + \sin(n\theta) \rho^n (i\lambda - i\bar{\lambda})$	
En posant $A = \lambda + \bar{\lambda}$ et $B = i(\lambda - \bar{\lambda})$ nous remarquons que ces deux nombres sont réels.	
Nous avons bien : $\exists! (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$	

Exercice	
Exercice	Donner sous forme explicite le terme de rang n de la fameuse suite de Fibonacci (u_n) définie par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ et } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$
Résolution	
L'équation caractéristique d'une telle suite est $r^2 = r + 1$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 5$ Ce polynôme admet deux racines réelles $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ Trouvons les. Pour cela résolvons le système : $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda = \mu \\ 1 = \lambda(r_1 - r_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$ Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (r_1^n - r_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$	