Matrices

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Remarque

Nous avons déjà vu qu'un système linéaire de n équations à inconnues $\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{Bmatrix}$

pouvait s'écrire sous forme matriciel : $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{11} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{11} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

A étant une matrice carré, la question de son inversibilité se pose et si inversibilité il y a, quelles sont les conséquences pour le système linéaire.

Définition

Un système linéaire de la forme $AX = B$ où A est une matrice carré inversible est dit système de **Cramer.**

Théorème

Un système de Cramer de la forme $AX = B$ admet une solution unique $X = A^{-1}B$

Preuve

L'existence d'une telle solution est évidente. Si $X = A^{-1}B$ alors $AX = AA^{-1}B = B$
Pour prouver l'unicité supposons qu'il existe X_1 et X_2 tels que $AX_1 = AX_2 = B$
Nous aurions alors $AX_1 - AX_2 = 0 \Rightarrow A(X_1 - X_2) = 0_{n,1} \Rightarrow X_1 - X_2 = A^{-1} * 0_{n,1} = 0_{n,1} \Rightarrow X_1 = X_2$
(Attention dans la ligne ci-dessus $0_{n,1}$ désigne la matrice colonne comportant n zéros)

Propriéte

Dans le cas particulier où $n = 2$ le système de cramer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ admet pour solution unique les réels $x = \dfrac{\begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

Preuve

Le système étant de Cramer il admet une solution unique.

$$a\frac{\begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} + b\frac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a(fd - bg) + b(ag - fc)}{ad - bc} = \frac{f(ad - bc)}{ad - bc} = f$$
$$c\frac{\begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} + d\frac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{c(fd - bg) + d(ag - fc)}{ad - bc} = \frac{g(ad - bc)}{ad - bc} = g$$

Théorème

Une matrice carré est inversible si et seulement si $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système $AX = B$ ne possède qu'une seule solution.

Preuve

- Nous venons de voire un peu plus haut que si A est inversible alors le le système $AX = B$ ne possède qu'une seule solution (et cela $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)
- Réciproquement. Soient $B_1, B_2 \dots B_n$ les matrices colonnes de la matrice I_n. Les sytèmes $AX = B_1$, $AX = B_2 \dots AX = B_n$ ne possèdent qu'une seule solution : $X_1, X_2 \dots X_n$. Soit C la matrice consituée des colonnes $X_1, X_2 \dots X_n$. Nous avons $AC = I_n$ $(*)$.
  Pour démontrer que $CA = I_n$, Nous composons à droite $(*)$ par A. $ACA = A \Rightarrow A(CA - I_n) = 0_{n,n}$
  Donc les colonnes de $CA - I_n$ que nous appelerons $D_1, D_2, \dots D_n$ vérifient toutes $AD_1 = AD_2 = \cdots AD_n = 0_{n,1}$
  Les systèmes $AD_1 = 0_{n,1}, AD_2 = 0_{n,1}, \dots AD_n = 0_{n,1}$ ne peuvent avoir qu'une seule solution. Or $0_{n,1}$ est déjà une solution à de tels systèmes. Nous en concluons que $D_1 = D_2 = \dots D_n = 0_{n,1}$.
  La matrice $CA - I_n$ est donc la matrice nulle ce qui implique $CA = I_n$
  Nous avons donc montré que $CA = AC = I_n \Rightarrow C = A^{-1}$

Remarque

Trouver la matrice inverse éventuelle d'une matrice A revient donc à résoudre le système $AX = B$ avec B quelconque.

Exemples

- Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et le système induit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

  Résolvons le système $\left\{\begin{matrix} x - z = a \\ x - y = b \\ x - y + z = c \end{matrix}\right\}$

  $\left\{\begin{matrix} x - z = a \\ x - y = b \\ x - y + z = c \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x - z = a \\ x - y = b \\ b + z = c \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = a + z \\ x - y = b \\ z = c - b \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = a + c - b \\ x - y = b \\ z = c - b \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = a + c - b \\ y = x - b \\ z = c - b \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = a + c - b \\ y = a + c - 2b \\ z = c - b \end{matrix}\right\}$ ce qui matriciellement peut s'écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

  N'importe quel système de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ possède donc une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Nous en déduisons l'inversibilité de A et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Supposons maintenant que la matrice soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ associée au système $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
  Résolvons le système $\left\{\begin{matrix} x - y - z = a \\ x - y = b \\ x - y + z = c \end{matrix}\right\}$

  $\left\{\begin{matrix} x - y - z = a \\ x - y = b \\ x - y + z = c \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} b - z = a \\ x - y = b \\ b + z = c \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z = b - a \\ x - y = b \\ z = c - b \end{matrix}\right\}$. Nous voyons que lorsque $b - a \neq c - b$ ce système n'admet pas de solution. Nous en déduisons la non inversibilité de B

Remarque	Nous avons vu dans une autre fiche que chaque opération élémentaire sur les lignes d'une matrice revenait à multiplier à gauche par une matrice inversible la même matrice. Cela nous ouvre une deuxième méthode pour déterminer l'inverse d'une matrice.
Propriété	Soit A une matrice carré quelconque. 1. Si il est possible de transformer A en matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes alors la matrice A est inversible. Le procédé nous permet de trouver A^{-1} 2. Si à la suite d'opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes de A nous aboutissons à une matrice non inversible alors A n'est pas inversible.

Preuve

Nous allons nous contenter de démontrer cette propriété pour des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A. Dans le cas d'opérations élémentaires sur les colonnes, nous aurions une démonstration complétement symétrique où cette fois les multiplications sur la matrice A ne se feraient plus à gauche mais à droite.

1. Considérons $P_1, P_2 \dots P_k$ les k matrices inversibles relatives aux k transformations qu'il a fallu effectuer sur les lignes de A pour la transformer en matrice identité. Soit $P = P_1 P_2 \dots P_k$. Nous avons $PA = I_n$
   $P(AP - I_n) = PAP - P = P - P = 0$ donc toutes les colonnes de $AP - I_n$ sont solutions de $PX = 0_{n,1}$
   P étant inversible (produit de matrices inversibles), un tel système est de Cramer et n'admet donc qu'une seule solution. $0_{n,1}$ étant une solution évidente nous en déduisons que toutes les colonnes de $AP - I_n$ sont nulles. Nous avons donc $AP = PA = I_n$. Donc A est inversible et $A^{-1} = P$

2. Considérons $P_1, P_2 \dots P_k$ les k matrices inversibles relatives aux k transformations qu'il a fallu effectuer sur les lignes de A pour la transformer en une matrice D non inversible. Soit $P = P_1 P_2 \dots P_k$. Nous avons $PA = D$
   Si A était inversible le produit PA serait donc lui aussi inversible (P est inversible) et nous serions donc arrivés à une contradiction. A n'est donc pas inversible.

Remarque	Le caractère inversible d'une matrice est donc donné par le caractère inversible de la matrice obtenue après diverses opérations élémentaires.

Exemple

Reprenons l'exemple des deux matrices précédentes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (L_1 \leftarrow L_1 + L_3)$
  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$
  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1\ et\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$
  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (L_2 \leftarrow -L_2)$
  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_2 + L_3)$ Nous avons réussi à transformer la matrice originelle en matrice identité et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (C_1 \leftarrow C_2 + C_1)$
  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible donc $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas non plus